MATHEMATIQUES — 1A EOST

TD 11 (new, déc. 2023) : Etoile double et satellite

1. **L'étoile double et le satellite**
   On modélise un système à deux étoiles, E_1 et E_2, très proches l'une de l'autre. Un tel système est une "étoile double", et est modélisé par deux masses ponctuelles $m^{(E_1)}$ et $m^{(E_2)}$ situées aux coordonnées cartésiennes $(0,0,d)$ et $(0,0,-d)$, respectivement. Soit O l'origine du repère cartésien. On suppose que $m^{(E_1)} = m^{(E_2)} = m$. On considère un satellite S qui orbite à grande distance, r, autour de cette étoile double : $r = \|\overrightarrow{OS}\| \gg d$. On suppose que le satellite S a pour coordonnées cartésiennes et sphériques $(r\sin\theta, 0, r\cos\theta)$ et $(r,\theta,0)$, respectivement ; S orbite dans un plan contenant E_1 et E_2.
   (a) **Faire** un schéma de l'étoile double et du satellite, avec aussi les repères cartésiens et sphériques.
   (b) Le potentiel gravitationnel créé en un point P par une masse ponctuelle $m^{(Q)}$ située en Q est par définition :
   $$\mathbb{V}(P; Q, m^{(Q)}) = -\mathcal{G}m^{(Q)}/\|\overrightarrow{PQ}\|.$$
      i. **Ecrire** sous la forme d'un développement en série de polynômes de Legendre le potentiel gravitationnel créé par l'étoile E_1 au niveau du satellite S :
      $$\mathbb{V}(S; E_1, m^{(E_1)}) = -\mathcal{G}m/\|\overrightarrow{SE_1}\| = \cdots ?$$
      ii. **Ecrire** sous la forme d'un développement en série de polynômes de Legendre le potentiel gravitationnel créé par l'étoile E_2 au niveau du satellite S :
      $$\mathbb{V}(S; E_2, m^{(E_2)}) = -\mathcal{G}m/\|\overrightarrow{SE_2}\| = \cdots ?$$
      iii. **Ecrire** sous la forme d'un développement en série de polynômes de Legendre le potentiel total créé au niveau du satellite par l'étoile double :
      $$\mathbb{V}^\star = \mathbb{V}(S; E_1, m^{(E_1)}) + \mathbb{V}(S; E_2, m^{(E_2)}) = \cdots ?$$
   (c) **Montrer** que lorsqu'on considère uniquement les 1$^{\text{er}}$ et 2$^{\text{ème}}$ termes non nuls de l'expression de $\mathbb{V}^\star$, alors on peut écrire $\mathbb{V}^\star \simeq \mathbb{V}^{(O)} + \delta\mathbb{V}$, avec $\mathbb{V}^{(O)} = -\mathcal{G}M/r$ le potentiel créé au niveau du satellite S par une masse ponctuelle M située en O, et $\delta\mathbb{V}$ un terme de perturbation "anisotrope". **Exprimer** la masse M en fonction de m. **Exprimer** $\delta\mathbb{V}$ en fonction de $\mathcal{G}$, m, d, r et de $P_2(\cos\theta)$ (le polynôme de Legendre de degré 2). **Expliquer** pourquoi le terme $\delta\mathbb{V}$ est qualifié d'*anisotrope* ?
   (d) **Exprimer** le rapport $\xi = \delta\mathbb{V}/\mathbb{V}^{(O)}$ en fonction de d, r et $P_2(\cos\theta)$. **Trouver** pour quelle valeurs de la colatitude θ (du satellite) le rapport ξ est *maximal* ? **Exprimer** en fonction de d et r cette valeur maximale $\xi^{\max}$. **Trouver** à partir de quelle distance r on a : $\xi^{\max} < 1\%$.

■ **Formulaire**

☐ Polynômes de Legendre : $P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell\left(x^2-1\right)^\ell}{dx^\ell}$; $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2\delta_{n,m}}{2n+1}$; $\delta_{n,m}$

☐ Fonction génératrice : $(1-t(2x-t))^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P_n(x)$.