École et observatoire
des **sciences de la Terre**
de l'Université de Strasbourg
et du CNRS

Laboratoire
Institut de **physique** du **globe**
de Strasbourg | IPGS | UMR 7516
de l'Université de Strasbourg
et du CNRS

Support de cours – 1A – EOST

Mathématiques (1er semestre)

Christophe ZAROLI

November 22, 2020

Contents

Contents **1**

1 Préambule sur le calcul tensoriel **3**

2 Espace vectoriel, espace Euclidien **7**

3 Tenseurs **17**

4 Espace ponctuel, coordonnées curvilignes, symboles de Christoffel **29**

5 Dérivée covariante, accélération d'une particule, opérateurs différentiels **51**

6 Transport parallèle **61**

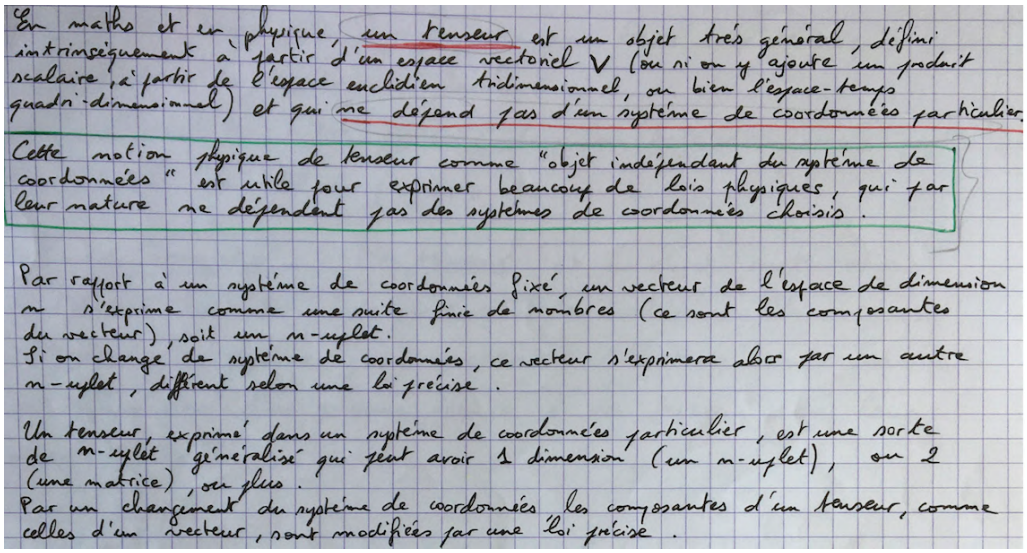
7 Géodésiques **69**

8 Polynômes de Legendre (associés) **91**

9 Harmoniques Sphériques **109**

Chapter 1

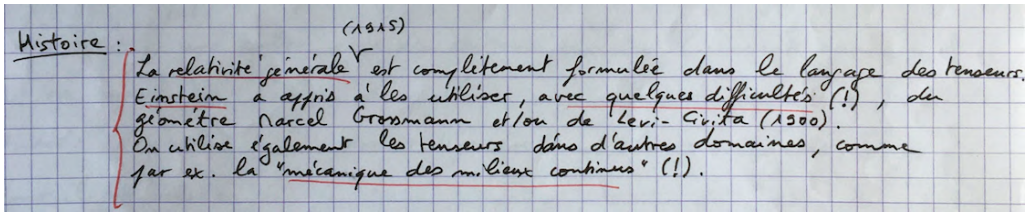
Préambule sur le calcul tensoriel

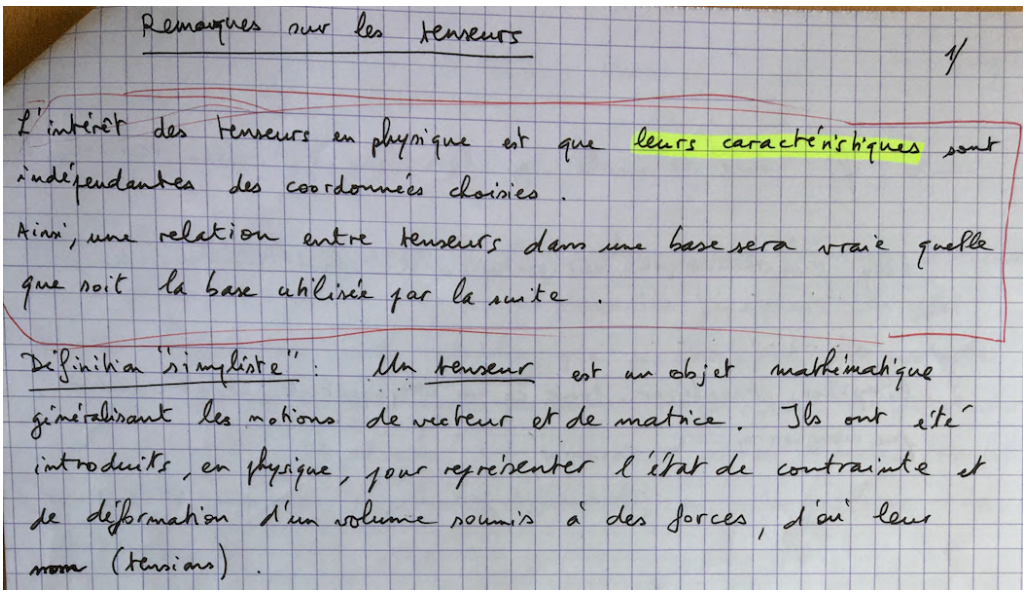

En maths et en physique, un tenseur est un objet très général, défini intrinsèquement à partir d'un espace vectoriel V (ou si on y ajoute un produit scalaire, à partir de l'espace euclidien tridimensionnel, ou bien l'espace-temps quadri-dimensionnel) et qui ne dépend pas d'un système de coordonnées particulier.

Cette notion physique de tenseur comme "objet indépendant du système de coordonnées" est utile pour exprimer beaucoup de lois physiques, qui par leur nature ne dépendent pas des systèmes de coordonnées choisis.

Par rapport à un système de coordonnées fixé, un vecteur de l'espace de dimension n s'exprime comme une suite finie de nombres (ce sont les composantes du vecteur), soit un n-uplet.
Si on change de système de coordonnées, ce vecteur s'exprimera alors par un autre n-uplet, différent selon une loi précise.

Un tenseur, exprimé dans un système de coordonnées particulier, est une sorte de n-uplet généralisé qui peut avoir 1 dimension (un n-uplet), ou 2 (une matrice), ou plus.
Par un changement du système de coordonnées, les composantes d'un tenseur, comme celles d'un vecteur, sont modifiées par une loi précise.


Histoire :
(1915)
La relativité générale est complètement formulée dans le langage des tenseurs. Einstein a appris à les utiliser, avec quelques difficultés (!), du géomètre Marcel Grossmann et/ou de Levi-Civita (1900).
On utilise également les tenseurs dans d'autres domaines, comme par ex. la "mécanique des milieux continus" (!).

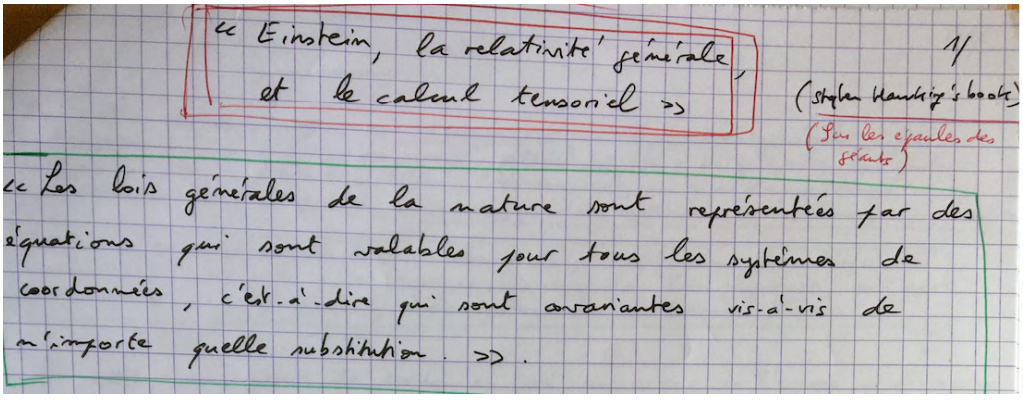


Remarques sur les tenseurs

1/

L'intérêt des tenseurs en physique est que leurs caractéristiques sont indépendantes des coordonnées choisies.
Ainsi, une relation entre tenseurs dans une base sera vraie quelle que soit la base utilisée par la suite.

Définition "simpliste": Un tenseur est un objet mathématique généralisant les notions de vecteur et de matrice. Ils ont été introduits, en physique, pour représenter l'état de contrainte et de déformation d'un volume soumis à des forces, d'où leur nom (tensions).



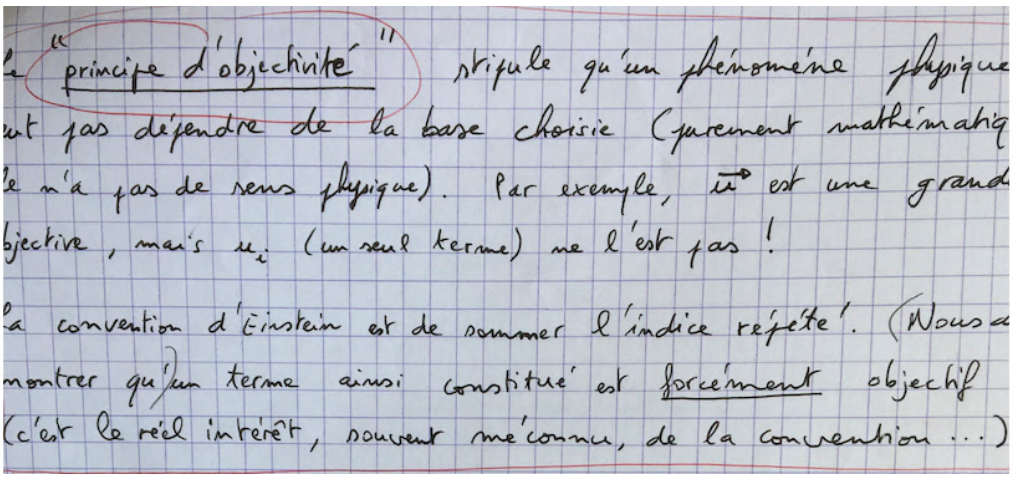
« Einstein, la relativité générale, et le calcul tensoriel »

1/

(Stephen Hawking's books)

(Sur les épaules des géants)

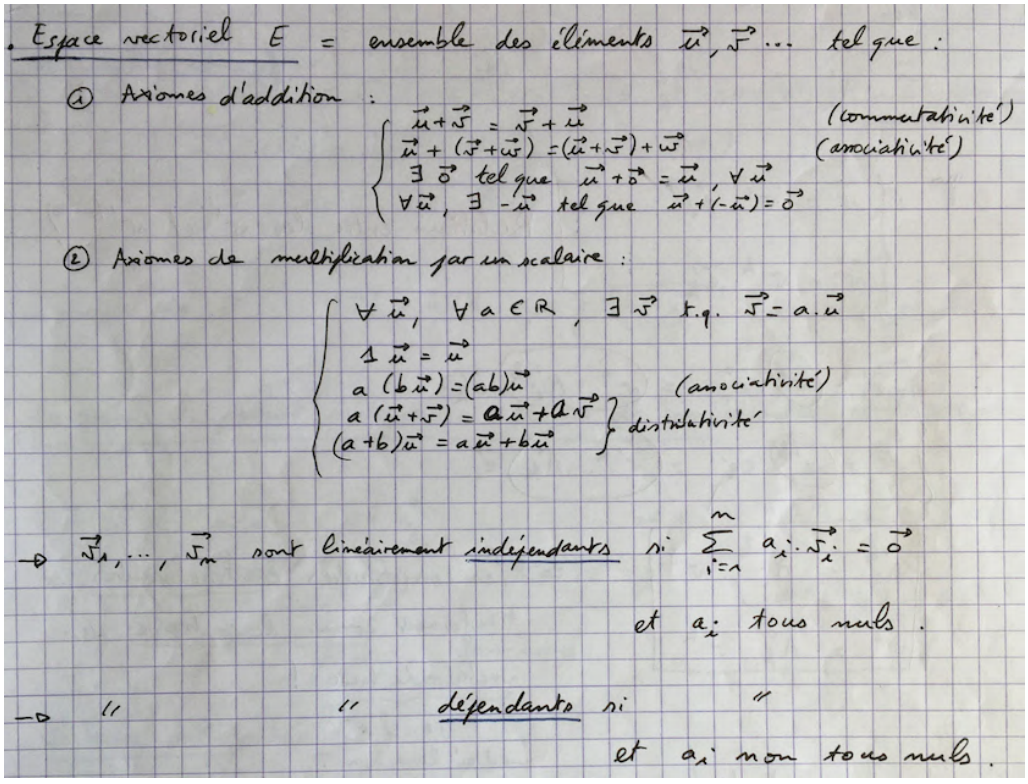
« Les lois générales de la nature sont représentées par des équations qui sont valables pour tous les systèmes de coordonnées, c'est-à-dire qui sont covariantes vis-à-vis de n'importe quelle substitution. »

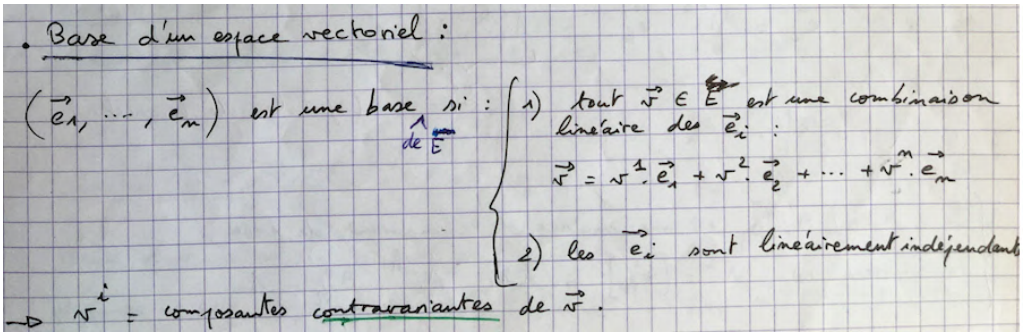

Le "principe d'objectivité" stipule qu'un phénomène physique
ut pas dépendre de la base choisie (purement mathématiq
le n'a pas de sens physique). Par exemple, $\vec{u}$ est une grand
bjective, mais u_i (un seul terme) ne l'est pas !

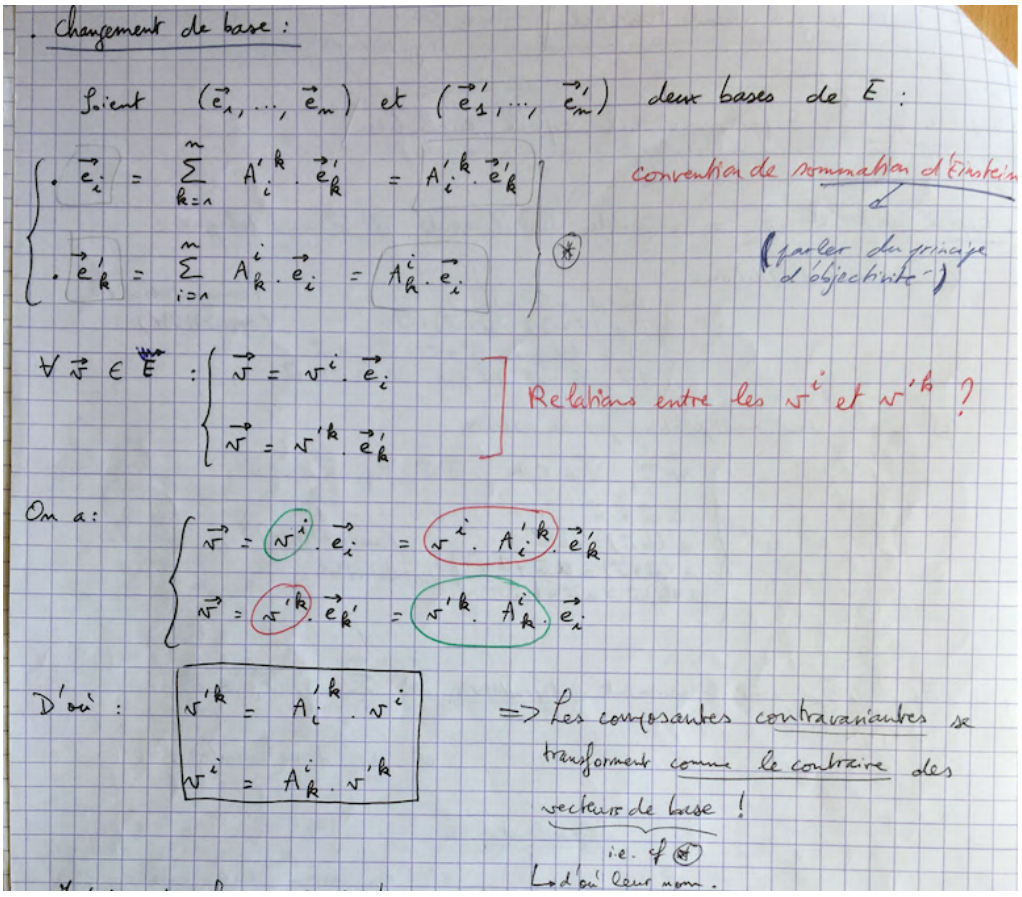
La convention d'Einstein est de sommer l'indice répété. (Nous a
montrer qu'un terme ainsi constitué est forcément objectif
(c'est le réel intérêt, souvent méconnu, de la convention ...)

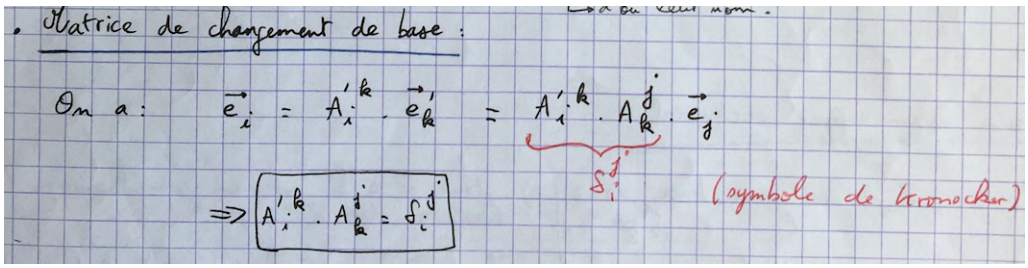
Chapter 2

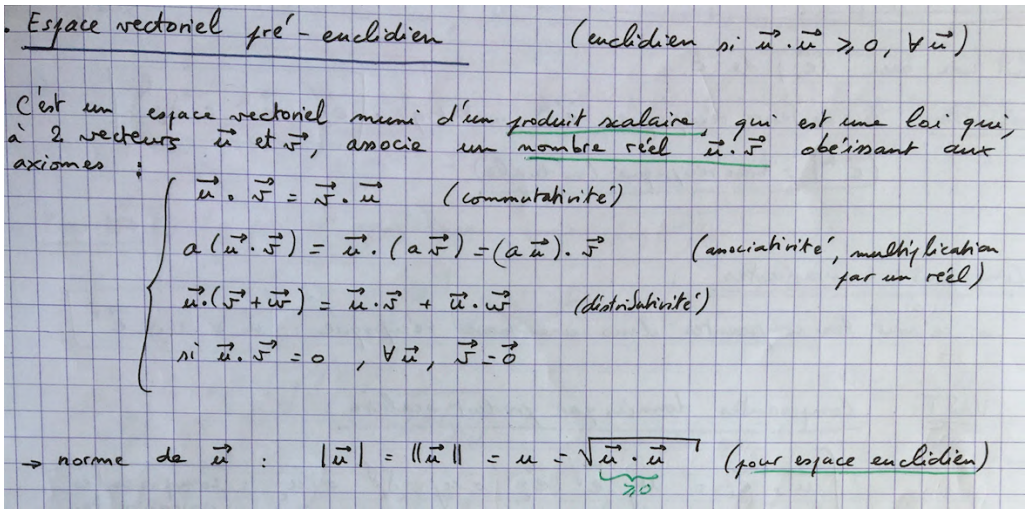
Espace vectoriel, espace Euclidien

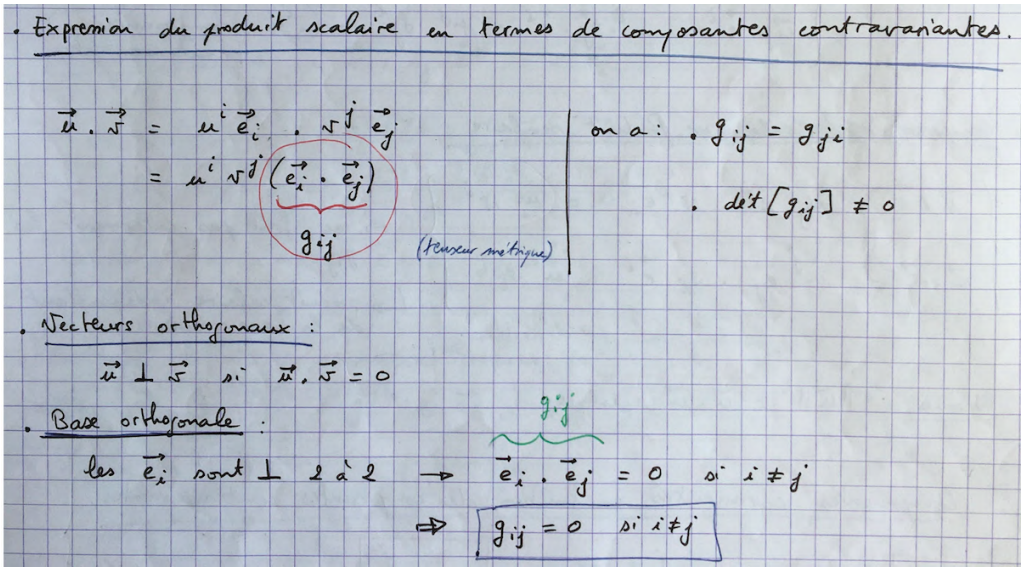


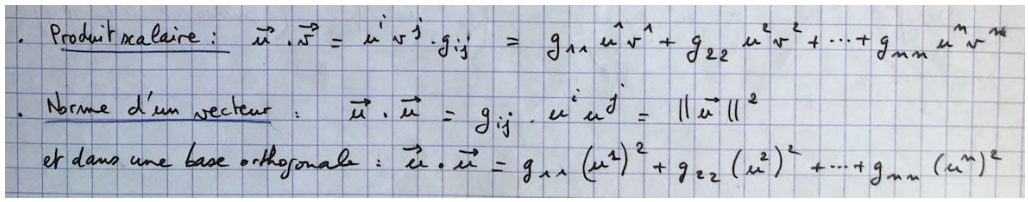

• Base d'un espace vectoriel :
$(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ est une base de E si :
1) tout $\vec{v} \in E$ est une combinaison linéaire des $\vec{e}_i$:
$\vec{v} = v^1 \cdot \vec{e}_1 + v^2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + v^m \cdot \vec{e}_m$
2) les $\vec{e}_i$ sont linéairement indépendants
→ v^i = composantes contravariantes de $\vec{v}$.

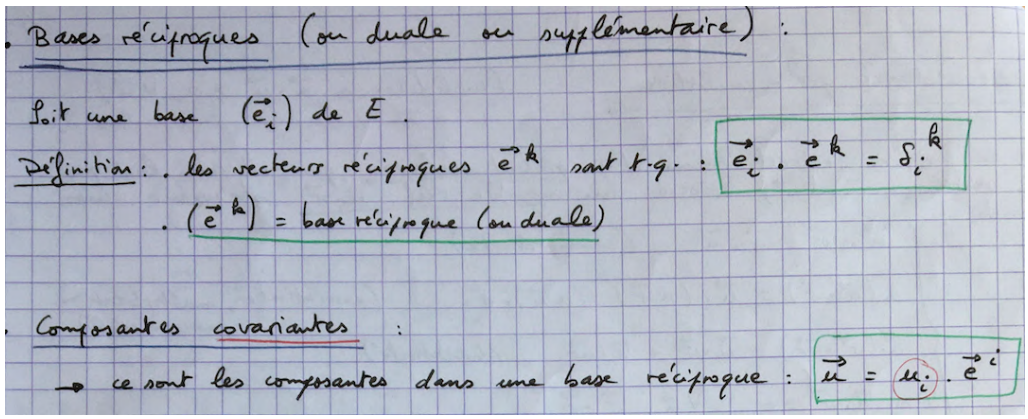

• Changement de base :
Soient $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ et $(\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_m)$ deux bases de E :
$\vec{e}_i = \sum_{k=1}^{m} A'^k_i \cdot \vec{e}'_k = A'^k_i \cdot \vec{e}'_k$
$\vec{e}'_k = \sum_{i=1}^{m} A^i_k \cdot \vec{e}_i = A^i_k \cdot \vec{e}_i$ (*)
convention de sommation d'Einstein
(parler du principe d'objectivité)
$\forall \vec{v} \in E$: $\vec{v} = v^i \cdot \vec{e}_i$; $\vec{v} = v'^k \cdot \vec{e}'_k$
Relations entre les v^i et v'^k ?
On a :
$\vec{v} = v^i \cdot \vec{e}_i = v^i \cdot A'^k_i \cdot \vec{e}'_k$
$\vec{v} = v'^k \cdot \vec{e}'_k = v'^k \cdot A^i_k \cdot \vec{e}_i$
D'où : $v'^k = A'^k_i \cdot v^i$; $v^i = A^i_k \cdot v'^k$
⇒ Les composantes contravariantes se transforment comme le contraire des vecteurs de base !
i.e. cf (*)
↳ d'où leur nom.


• Matrice de changement de base :
On a : $\vec{e}_i = A'^{k}_{i} \cdot \vec{e}'_k = A'^{k}_{i} \cdot A^{j}_{k} \cdot \vec{e}_j$
δ^{j}_{i}
$\Rightarrow \boxed{A'^{k}_{i} \cdot A^{j}_{k} = \delta^{j}_{i}}$
(symbole de Kronecker)


• Espace vectoriel pré-euclidien
(euclidien si $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0, \forall \vec{u}$)
C'est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, qui est une loi qui, à 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, associe un nombre réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ obéissant aux axiomes :
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (commutativité)
$a(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (a\vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v}$ (associativité, multiplication par un réel)
$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributivité)
si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0, \forall \vec{u}, \vec{v} = \vec{0}$
→ norme de $\vec{u}$: $|\vec{u}| = \|\vec{u}\| = u = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ (pour espace euclidien)
≥ 0


• Expression du produit scalaire en termes de composantes contravariantes.
$\vec{u}\cdot\vec{v} = u^i \vec{e}_i \cdot v^j \vec{e}_j$
$= u^i v^j (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)$
g_{ij}
(tenseur métrique)
on a : • $g_{ij} = g_{ji}$
• $\det[g_{ij}] \neq 0$
• Vecteurs orthogonaux :
$\vec{u} \perp \vec{v}$ si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$
• Base orthogonale :
g_{ij}
les $\vec{e}_i$ sont ⊥ 2 à 2 → $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$ si $i \neq j$
⇒ $g_{ij} = 0$ si $i \neq j$


• Produit scalaire : $\vec{u}\cdot\vec{v} = u^i v^j \cdot g_{ij} = g_{11} u^1 v^1 + g_{22} u^2 v^2 + \cdots + g_{nn} u^n v^n$
• Norme d'un vecteur : $\vec{u}\cdot\vec{u} = g_{ij} \cdot u^i u^j = \|\vec{u}\|^2$
et dans une base orthogonale : $\vec{u}\cdot\vec{u} = g_{11} (u^1)^2 + g_{22} (u^2)^2 + \cdots + g_{nn} (u^n)^2$


• Bases réciproques (ou duale ou supplémentaire) :
Soit une base $(\vec{e}_i)$ de E.
Définition : • les vecteurs réciproques $\vec{e}^k$ sont t.q. : $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^k = \delta_i^k$
• $(\vec{e}^k)$ = base réciproque (ou duale)
• Composantes covariantes :
→ ce sont les composantes dans une base réciproque : $\vec{u} = u_i \cdot \vec{e}^i$

MUST : Composantes données par produit scalaire :

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{e}_i = u_j \, \vec{e}^{\,j} \cdot \vec{e}_i = u_j \, \delta_i^j = u_i & : \text{composantes covariantes} \\ \vec{u} \cdot \vec{e}^{\,i} = u^j \, \vec{e}_j \cdot \vec{e}^{\,i} = u^j \, \delta_j^i = u^i & : \text{composantes contravariantes} \end{cases}$$

• ~~Composantes données par~~ Produit scalaire :

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = u_j \, \vec{e}^{\,j} \cdot v^i \, \vec{e}_i = \underbrace{u_i \, v^i}_{\text{scalaire}} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = u^j \, \vec{e}_j \cdot v_i \, \vec{e}^{\,i} = u^i \, v_i \end{cases}$$

(car $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^{\,j} = \delta_i^j$ par définition

⇒ ne font pas interveni g_{ij}

↳ produit scalaire indépena de la base choisie.

Composantes covariantes en fonction des composantes contravariantes :

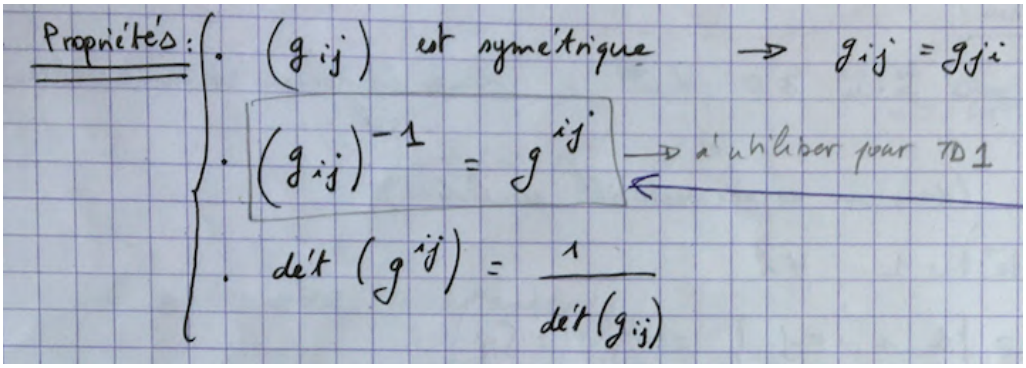
$$\boxed{u_i} = \vec{u} \cdot \vec{e}_i = u^j \, \underbrace{\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i}_{g_{ij}} = \boxed{g_{ij} \, u^j}$$

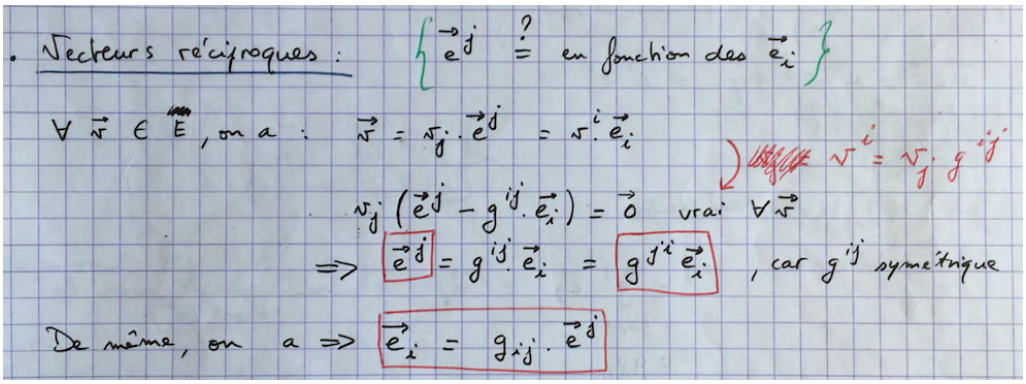
(abaissement de l'in

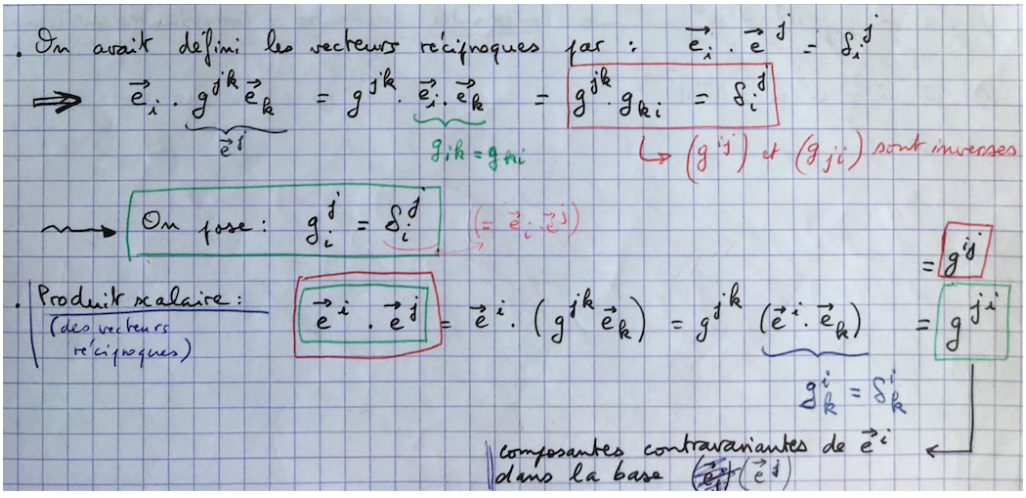
Composantes contravariantes en fonction des composantes covariantes.

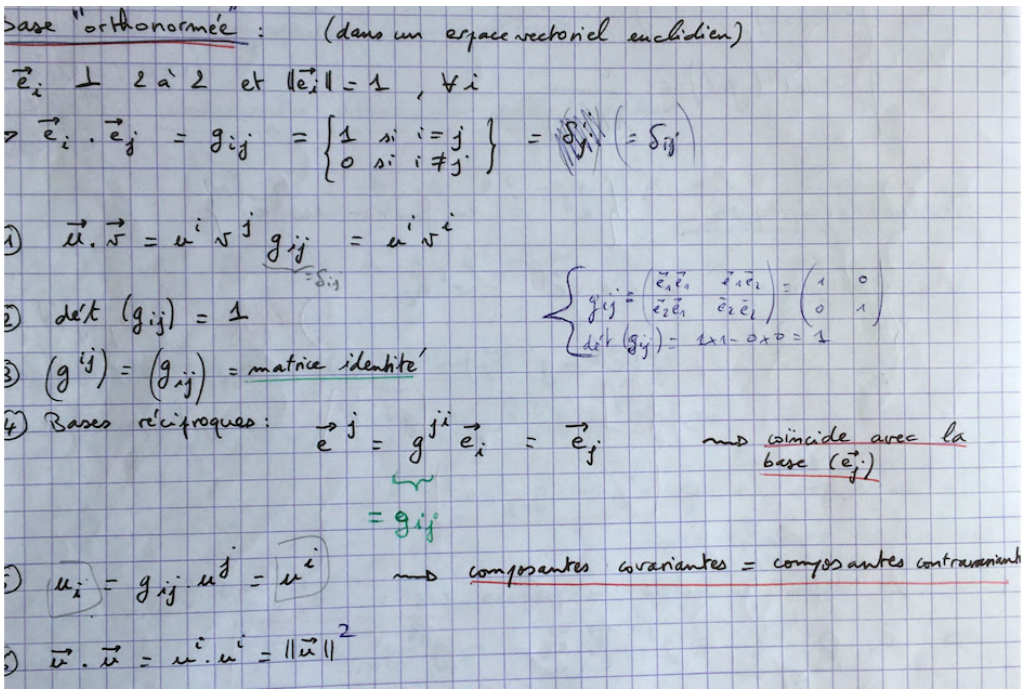
On a : $\boxed{u^j = g^{ji} \, u_i}$ (élévation de l'indice) (*) on montre ci-dessous que $\vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}^{\,j} = g^{ij}$

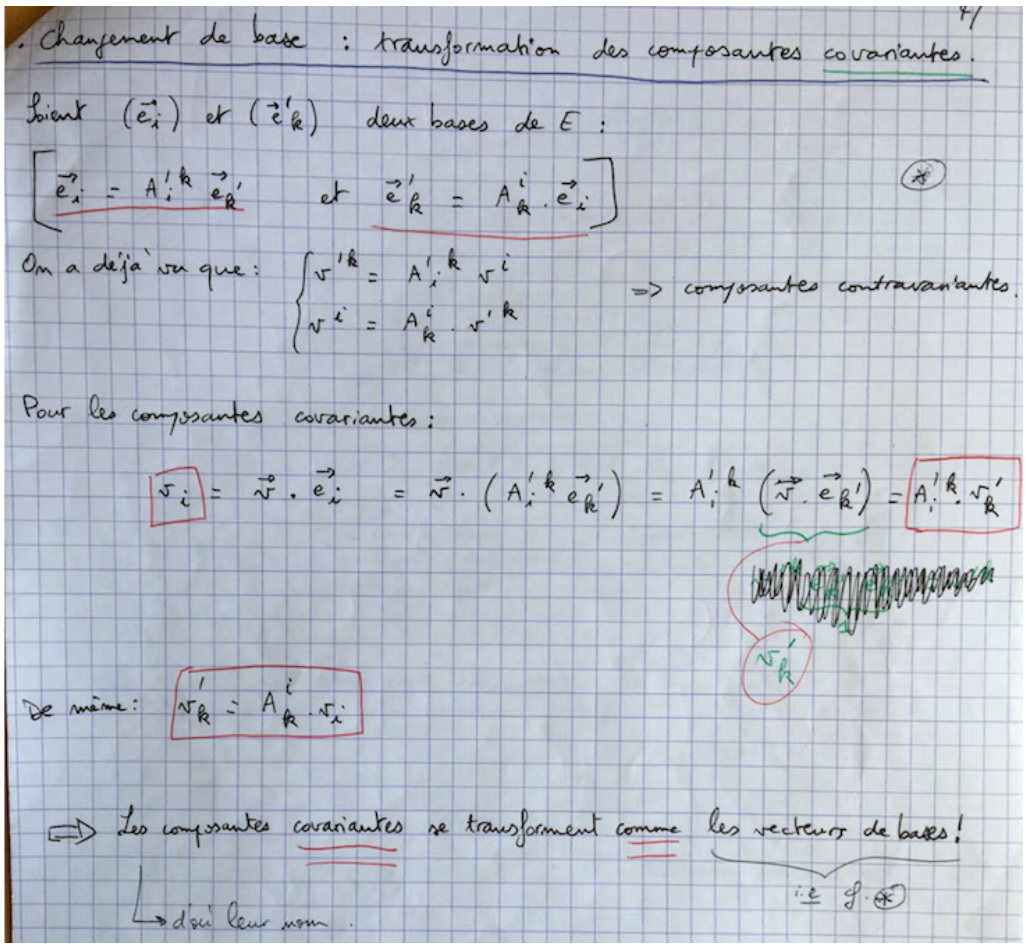
$$\vec{e}^{\,j} \cdot \underbrace{\vec{e}^{\,i} \, u_i}_{\vec{u}} \Big\} \; \vec{u} \cdot \vec{e}^{\,j} = u^j$$

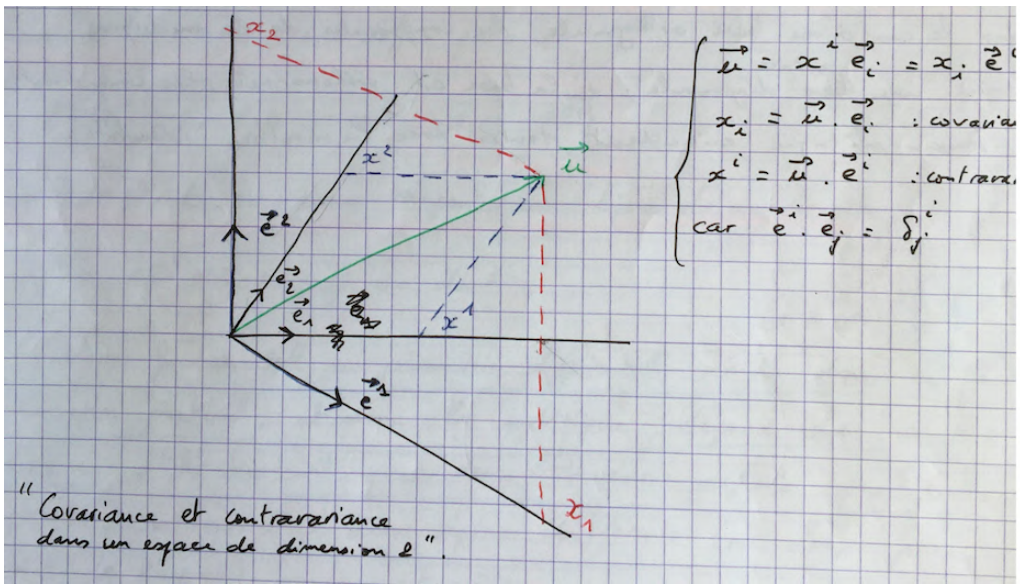

Propriétés :
(g_{ij}) est symétrique $\rightarrow$ $g_{ij} = g_{ji}$
$(g_{ij})^{-1} = g^{ij}$
à utiliser pour TD 1
$\det(g^{ij}) = \frac{1}{\det(g_{ij})}$


Vecteurs réciproques : $\{\vec{e}^{\,j} \overset{?}{=}$ en fonction des $\vec{e}_i\}$
$\forall \vec{v} \in E$, on a : $\vec{v} = v_j \cdot \vec{e}^{\,j} = v^i \vec{e}_i$
$v^i = v_j \, g^{ij}$
$v_j (\vec{e}^{\,j} - g^{ij} \cdot \vec{e}_i) = \vec{0}$ vrai $\forall \vec{v}$
$\Rightarrow \vec{e}^{\,j} = g^{ij} \vec{e}_i = g^{ji} \vec{e}_i$, car g^{ij} symétrique
De même, on a $\Rightarrow \vec{e}_i = g_{ij} \cdot \vec{e}^{\,j}$


On avait défini les vecteurs réciproques par : $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^{\,j} = \delta_i^{\,j}$
$\vec{e}_i \cdot g^{jk} \vec{e}_k = g^{jk} \cdot \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = g^{jk} g_{ki} = \delta_i^{\,j}$
$\vec{e}^{\,j}$
$g_{ik} = g_{ki}$
(g^{ij}) et (g_{ji}) sont inverses
On pose : $g_i^{\,j} = \delta_i^{\,j}$ $(= \vec{e}_i \cdot \vec{e}^{\,j})$
Produit scalaire : (des vecteurs réciproques)
$\vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}^{\,j} = \vec{e}^{\,i} \cdot (g^{jk} \vec{e}_k) = g^{jk} (\vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}_k) = g^{ji}$
$= g^{ij}$
$\delta_k^i = \delta_k^i$
composantes contravariantes de $\vec{e}^{\,i}$ dans la base $(\vec{e}^{\,j})$


base "orthonormée" : (dans un espace vectoriel euclidien)
$\vec{e}_i \perp$ 2 à 2 et $\|\vec{e}_i\| = 1$, $\forall i$
$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} = \delta_{ij}$
1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = u^i v^j g_{ij} = u^i v^i$ ($g_{ij} = \delta_{ij}$)
2) $\det(g_{ij}) = 1$
3) $(g^{ij}) = (g_{ij})$ = matrice identité
4) Bases réciproques : $\vec{e}^{\,j} = g^{ji} \vec{e}_i = \vec{e}_j$ ($g^{ji} = g_{ij}$) ⇝ coïncide avec la base $(\vec{e}_j)$
5) $u_i = g_{ij} u^j = u^i$ ⇝ composantes covariantes = composantes contravariantes
6) $\vec{u} \cdot \vec{u} = u^i \cdot u^i = \|\vec{u}\|^2$
$g_{ij} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1\vec{e}_1 & \vec{e}_1\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2\vec{e}_1 & \vec{e}_2\vec{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\det(g_{ij}) = 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$

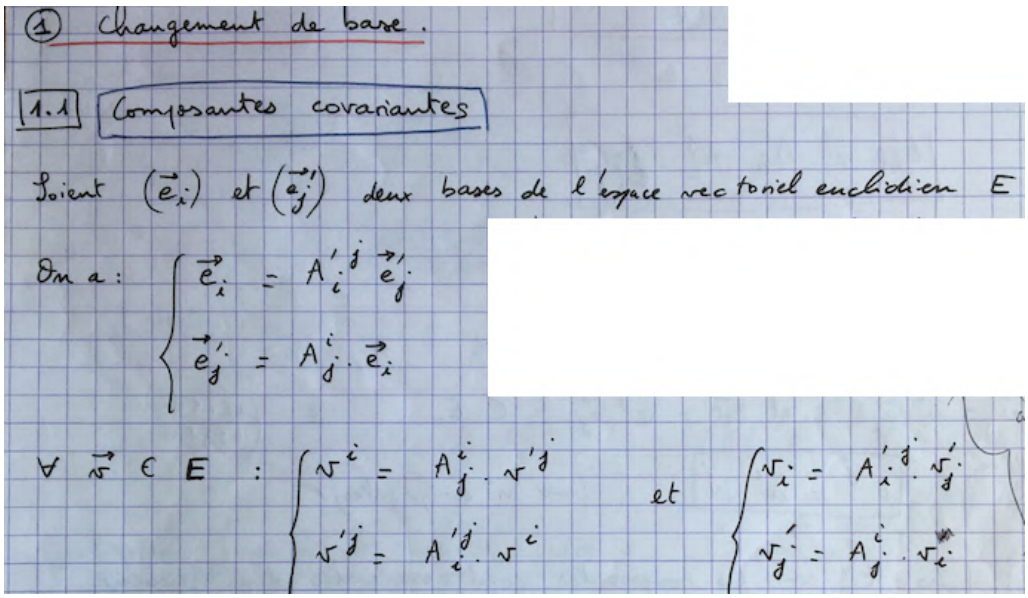

. Changement de base : transformation des composantes covariantes.
Soient $(\vec{e}_i)$ et $(\vec{e}'_k)$ deux bases de E :
$\vec{e}_i = A'^{k}_{i}\,\vec{e}'_k$ et $\vec{e}'_k = A^{i}_{k}\,\vec{e}_i$
On a déjà vu que :
$v'^{k} = A'^{k}_{i}\,v^{i}$
$v^{i} = A^{i}_{k}\,v'^{k}$
=> composantes contravariantes.
Pour les composantes covariantes :
$v_i = \vec{v}\cdot\vec{e}_i = \vec{v}\cdot(A'^{k}_{i}\,\vec{e}'_k) = A'^{k}_{i}(\vec{v}\cdot\vec{e}'_k) = A'^{k}_{i}\,v'_k$
v'_k
De même : $v'_k = A^{i}_{k}\,v_i$
⇒ Les composantes covariantes se transforment comme les vecteurs de bases !
i.e
d'où leur nom.

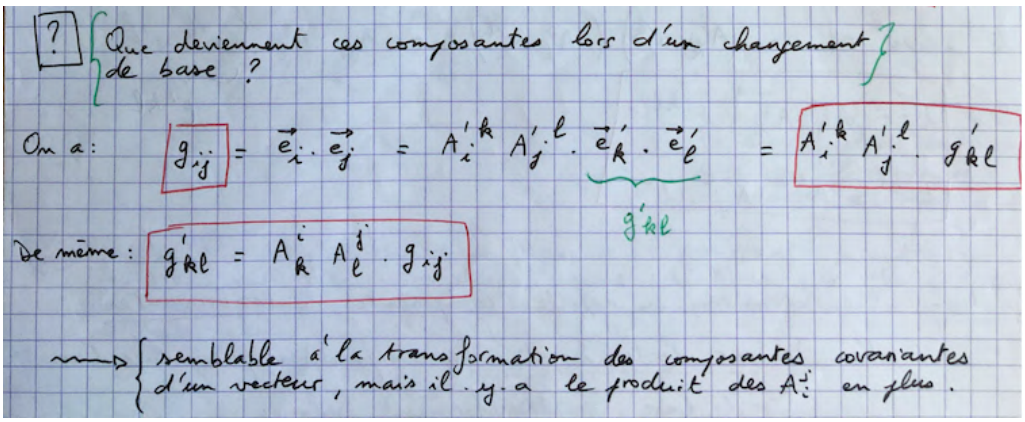


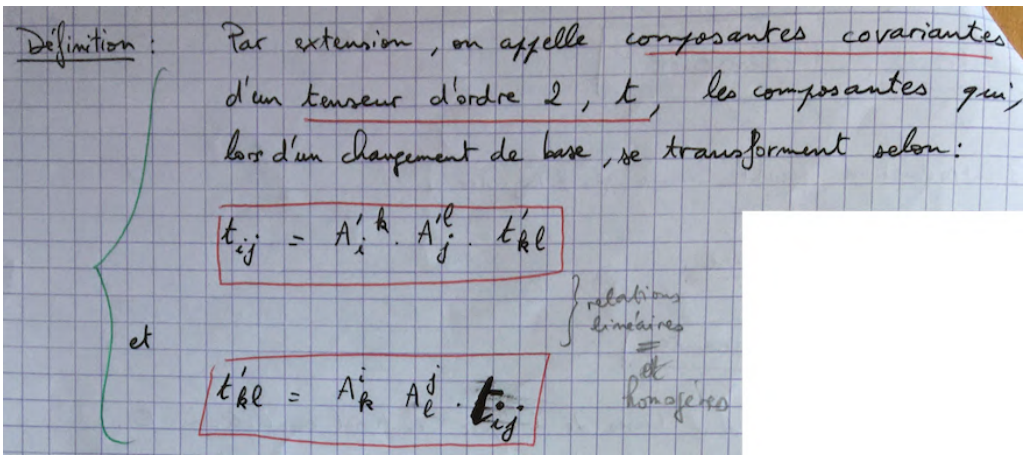
"Covariance et contravariance dans un espace de dimension 2".

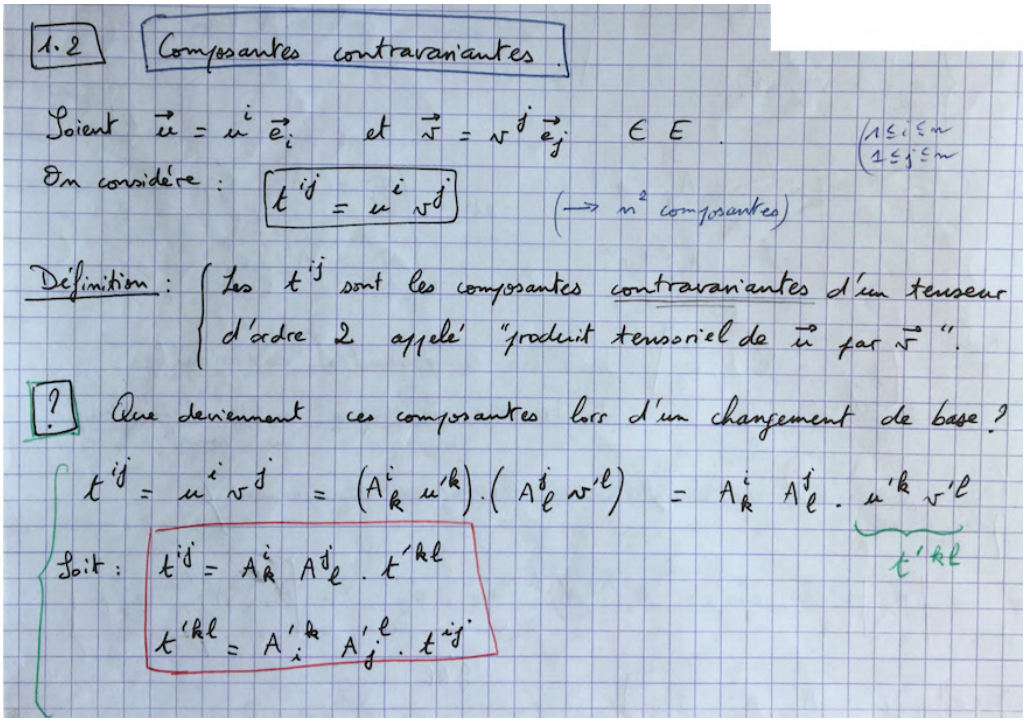
Chapter 3

Tenseurs




?
Que deviennent ces composantes lors d'un changement de base ?
On a :
$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = A'^{k}_{i} A'^{\ell}_{j} \cdot \vec{e}'_k \cdot \vec{e}'_\ell = A'^{k}_{i} A'^{\ell}_{j} \cdot g'_{k\ell}$
$g'_{k\ell}$
De même : $g'_{k\ell} = A^{i}_{k} A^{j}_{\ell} \cdot g_{ij}$
→ { semblable à la transformation des composantes covariantes d'un vecteur, mais il y a le produit des A^{i}_{j} en plus.


Définition :
Par extension, on appelle composantes covariantes d'un tenseur d'ordre 2, t, les composantes qui, lors d'un changement de base, se transforment selon :
$t_{ij} = A'^{k}_{i} \cdot A'^{\ell}_{j} \cdot t'_{k\ell}$
et
$t'_{k\ell} = A^{i}_{k} A^{j}_{\ell} \cdot t_{ij}$
} relations linéaires et homogènes



1.2 Composantes contravariantes

Soient $\vec{u} = u^i \vec{e}_i$ et $\vec{v} = v^j \vec{e}_j \in E$. $(1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n)$

On considère : $t^{ij} = u^i v^j$ $(\rightarrow n^2$ composantes$)$

Définition : Les t^{ij} sont les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre 2 appelé "produit tensoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$".

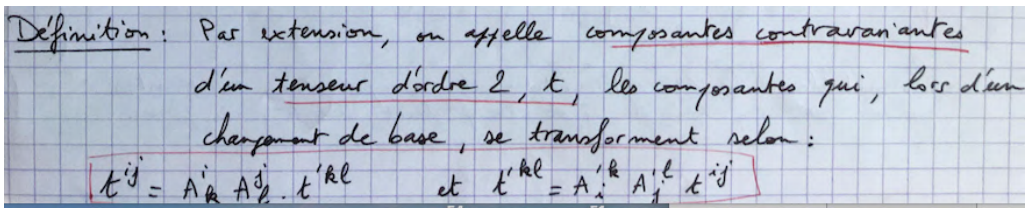
? Que deviennent ces composantes lors d'un changement de base ?

$$t^{ij} = u^i v^j = \left(A^i_k u'^k\right).\left(A^j_\ell v'^\ell\right) = A^i_k A^j_\ell . u'^k v'^\ell$$

$u'^k v'^\ell = t'^{k\ell}$

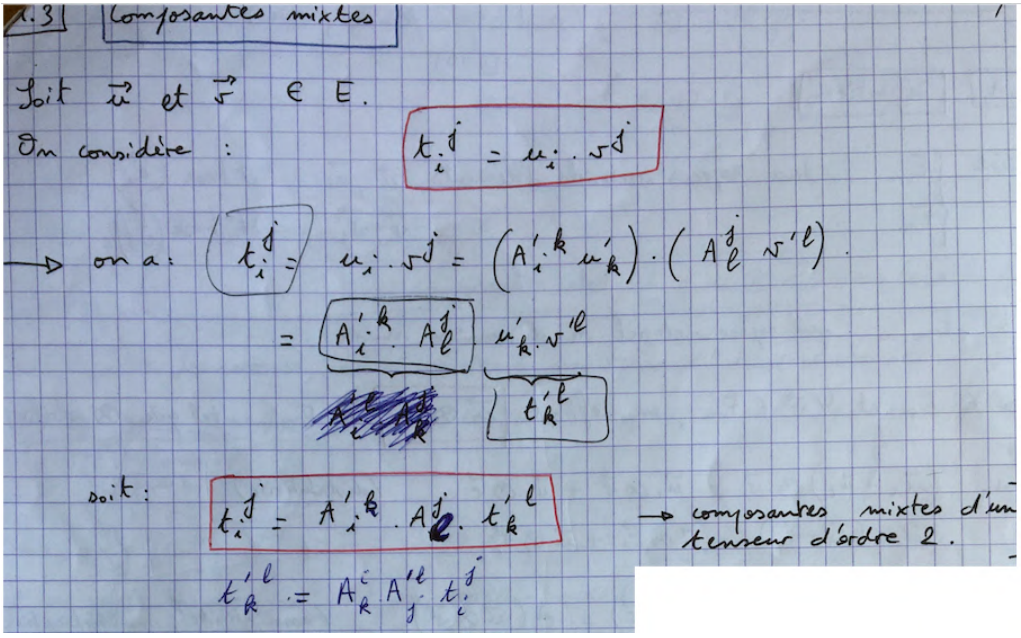
Soit : $t^{ij} = A^i_k A^j_\ell . t'^{k\ell}$

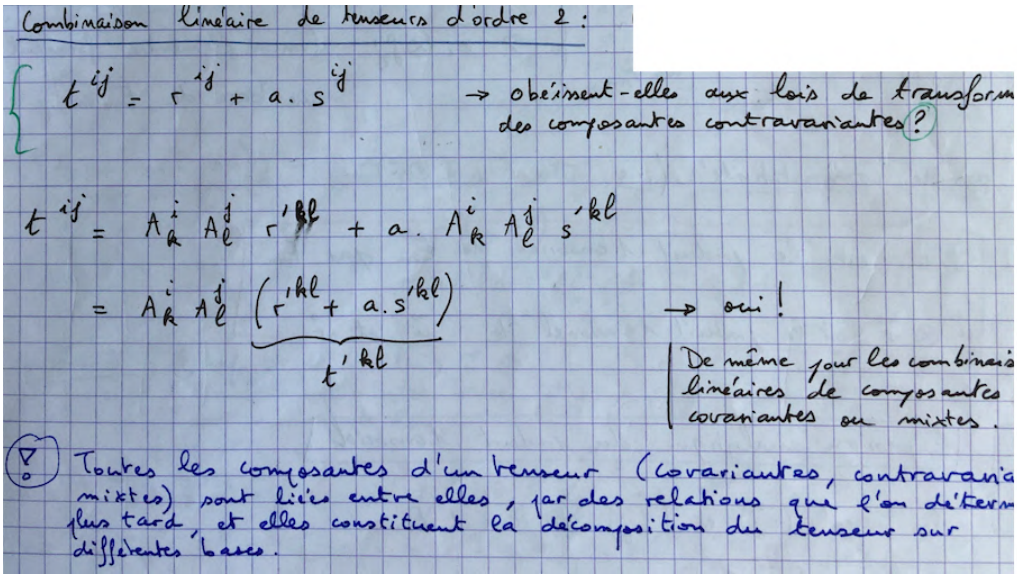
$t'^{k\ell} = A'^k_i A'^\ell_j . t^{ij}$



Définition : Par extension, on appelle composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre 2, t, les composantes qui, lors d'un changement de base, se transforment selon :

$t^{ij} = A^i_k A^j_\ell . t'^{k\ell}$ et $t'^{k\ell} = A'^k_i A'^\ell_j t^{ij}$


3.3 Composantes mixtes
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\in E$.
On considère : $t_i^{\ j} = u_i \cdot v^j$
→ on a : $t_i^{\ j} = u_i \cdot v^j = \left(A'^{\ k}_{\ i}\, u'_k\right) \cdot \left(A^j_{\ \ell}\, v'^{\ell}\right)$
$= A'^{\ k}_{\ i} \cdot A^j_{\ \ell}\ u'_k \cdot v'^{\ell}$
$t'^{\ \ell}_k$
soit : $t_i^{\ j} = A'^{\ k}_{\ i} \cdot A^j_{\ \ell} \cdot t'^{\ \ell}_k$
→ composantes mixtes d'un tenseur d'ordre 2.
$t'^{\ \ell}_k = A^i_{\ k} A'^{\ \ell}_{\ j} \cdot t_i^{\ j}$


Combinaison linéaire de tenseurs d'ordre 2 :
$t^{ij} = r^{ij} + a \cdot s^{ij}$
→ obéissent-elles aux lois de transform des composantes contravariantes ?
$t'^{ij} = A^i_k A^j_\ell\, r'^{kl} + a \cdot A^i_k A^j_\ell\, s'^{kl}$
$= A^i_k A^j_\ell \underbrace{\left(r'^{kl} + a \cdot s'^{kl}\right)}_{t'^{kl}}$
→ oui !
De même pour les combinais linéaires de composantes covariantes ou mixtes.
Toutes les composantes d'un tenseur (covariantes, contravaria mixtes) sont liées entre elles, par des relations que l'on déterm plus tard, et elles constituent la décomposition du tenseur sur différentes bases.

(2) Produit tensoriel

2.1 Définition

Soient $\begin{cases} E_n \\ F_m \end{cases}$ deux espaces vectoriels d'éléments $\vec{u}, \vec{u_i}$ ... et base $(\vec{e_i})$; $\vec{v}, \vec{v_j}$ .... et base $(\vec{f_j})$

Soit $E_{n.m}$ un espace vectoriel de dimension $n.m$.

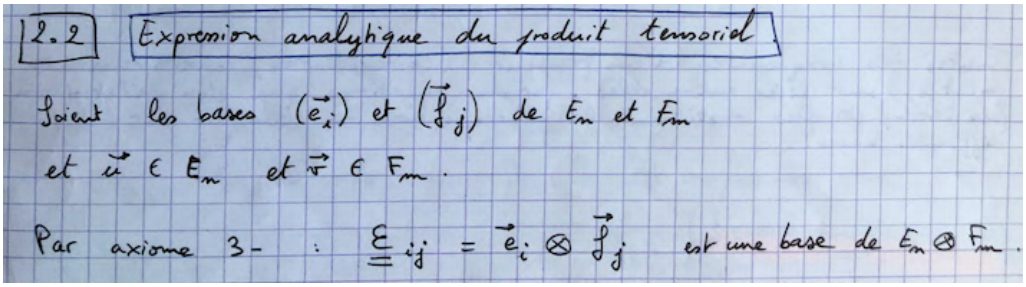
$\forall \vec{u} \in E_n$ et $\forall \vec{v} \in F_m$, on définit $\vec{u} \otimes \vec{v} \in E_{nm}$ tel que $\otimes$ vérifie :

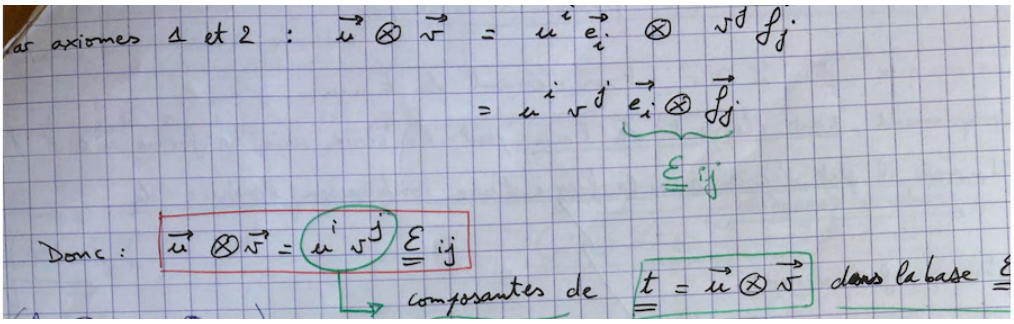
1. $(\vec{u_1} + \vec{u_2}) \otimes \vec{v} = \vec{u_1} \otimes \vec{v} + \vec{u_2} \otimes \vec{v}$ (distributivité)
   $\vec{u} \otimes (\vec{v_1} + \vec{v_2}) = \vec{u} \otimes \vec{v_1} + \vec{u} \otimes \vec{v_2}$
2. $(\lambda \vec{u}) \otimes \vec{v} = \vec{u} \otimes (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \otimes \vec{v})$ (associativité, multiplication par un scalaire).
3. $(\vec{e_i})$ base quelconque de E_n, $(\vec{f_j})$ " " de F_m $\Rightarrow \vec{e_i} \otimes \vec{f_j}$ ($n.m$ éléments) forment une base de E_{nm}.

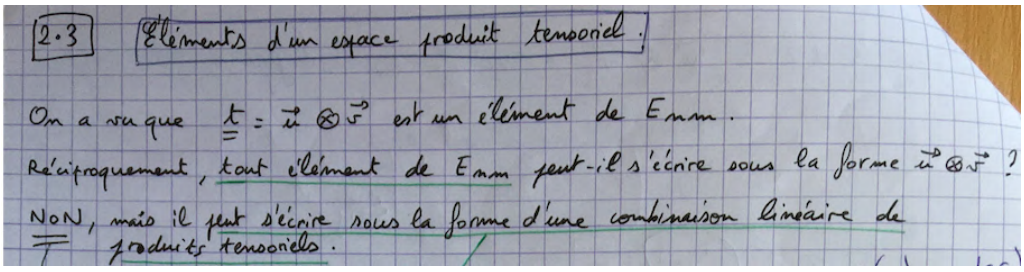
Rq : pas de commutativité. (i.e. : $\vec{u} \otimes \vec{v} \neq \vec{v} \otimes \vec{u}$)

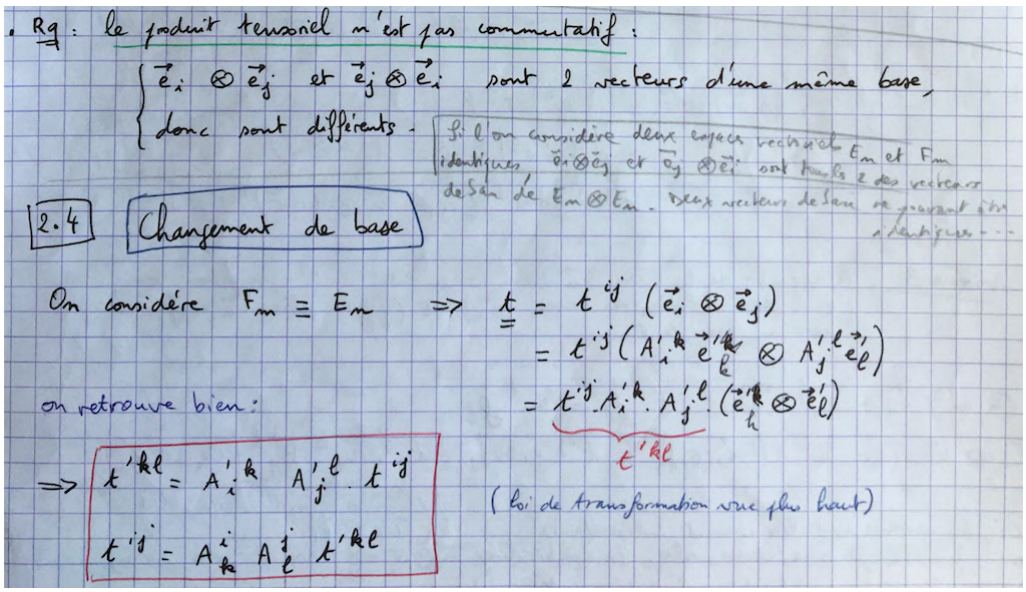
→ E_{nm} est le produit tensoriel de E_n par F_m.

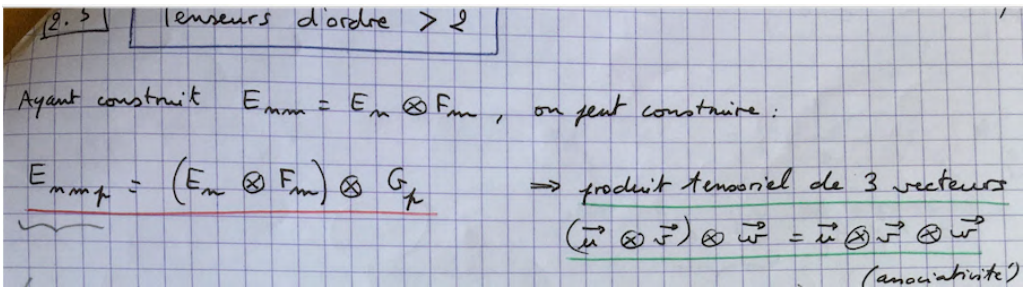
$\vec{u} \otimes \vec{v}$ est le produit tensoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$


2.2 Expression analytique du produit tensoriel
Soient les bases $(\vec{e}_i)$ et $(\vec{f}_j)$ de E_n et F_m
et $\vec{u} \in E_n$ et $\vec{v} \in F_m$.
Par axiome 3- : $\underline{\underline{\mathcal{E}}}_{ij} = \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j$ est une base de $E_n \otimes F_m$.


ar axiomes 1 et 2 : $\vec{u} \otimes \vec{v} = u^i \vec{e}_i \otimes v^j \vec{f}_j$
$= u^i v^j \vec{e}_i \otimes \vec{f}_j$
$\underline{\underline{\mathcal{E}}}_{ij}$
Donc : $\vec{u} \otimes \vec{v} = u^i v^j \underline{\underline{\mathcal{E}}}_{ij}$
composantes de $\underline{\underline{t}} = \vec{u} \otimes \vec{v}$ dans la base


2.3 Éléments d'un espace produit tensoriel :
On a vu que $\underline{\underline{t}} = \vec{u} \otimes \vec{v}$ est un élément de E_{nm}.
Réciproquement, tout élément de E_{nm} peut-il s'écrire sous la forme $\vec{u} \otimes \vec{v}$?
NON, mais il peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de
produits tensoriels.


Rq : le produit tensoriel n'est pas commutatif :
$\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ et $\vec{e}_j \otimes \vec{e}_i$ sont 2 vecteurs d'une même base,
donc sont différents.
Si l'on considère deux espaces vectoriels E_m et F_m identiques, $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ et $\vec{e}_j \otimes \vec{e}_i$ sont toujours 2 des vecteurs de la base de $E_m \otimes E_m$. Deux vecteurs de base ne pouvant être identiques...
2.4 Changement de base
On considère $F_m \equiv E_m \Rightarrow \underline{\underline{t}} = t^{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$
$= t^{ij} (A'^{k}_{i} \vec{e}'_k \otimes A'^{l}_{j} \vec{e}'_l)$
$= t^{ij} A'^{k}_{i} A'^{l}_{j} (\vec{e}'_k \otimes \vec{e}'_l)$
t'^{kl}
on retrouve bien :
$\Rightarrow t'^{kl} = A'^{k}_{i} A'^{l}_{j} t^{ij}$
$t^{ij} = A^{i}_{k} A^{j}_{l} t'^{kl}$
(loi de transformation vue plus haut)


2.5 Tenseurs d'ordre > 2
Ayant construit $E_{mm} = E_m \otimes F_m$, on peut construire :
$E_{mmp} = (E_m \otimes F_m) \otimes G_p$
$\Rightarrow$ produit tensoriel de 3 vecteurs
$(\vec{u} \otimes \vec{v}) \otimes \vec{w} = \vec{u} \otimes \vec{v} \otimes \vec{w}$
(associativité)

- **Relation entre g^{ij} et g_{ij}.**

$$g^{ij} = \vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}^{\,j} = g^{ik} g^{jl} \underbrace{\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l}_{g_{kl}} = g^{ik} g^{jl} \cdot g_{kl}$$

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ik} \, g_{jl} \cdot \underbrace{\vec{e}^{\,k} \, \vec{e}^{\,l}}_{g^{kl}} = g_{ik} \, g_{jl} \cdot g^{kl}$$

$\Rightarrow$ Les g_{ij} sont les composantes covariantes de $\underline{\underline{g}}$: tenseur métrique fondamental unité.

- **Composantes mixtes.**

$$g^i_j = \vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}_j = \Big(g^{ik} \cdot \vec{e}_k\Big) \cdot \vec{e}_j = g^{ik} \, g_{kj}$$

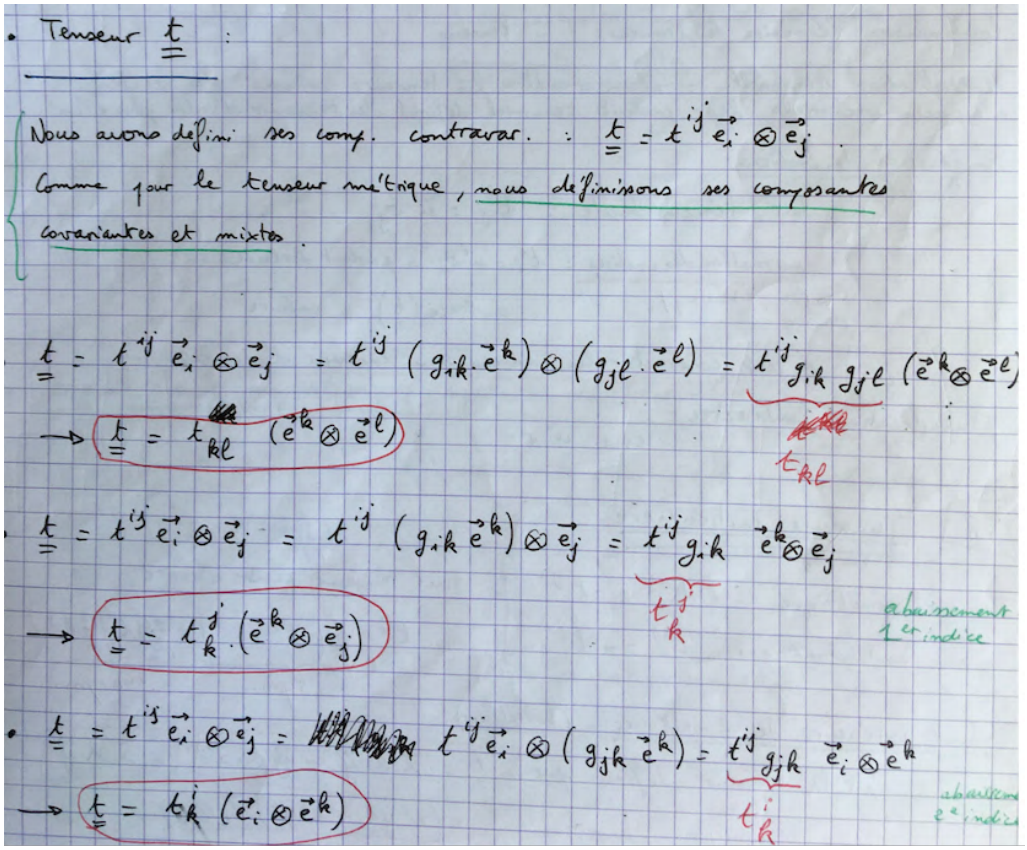
(sous l'accolade : g_{kj})

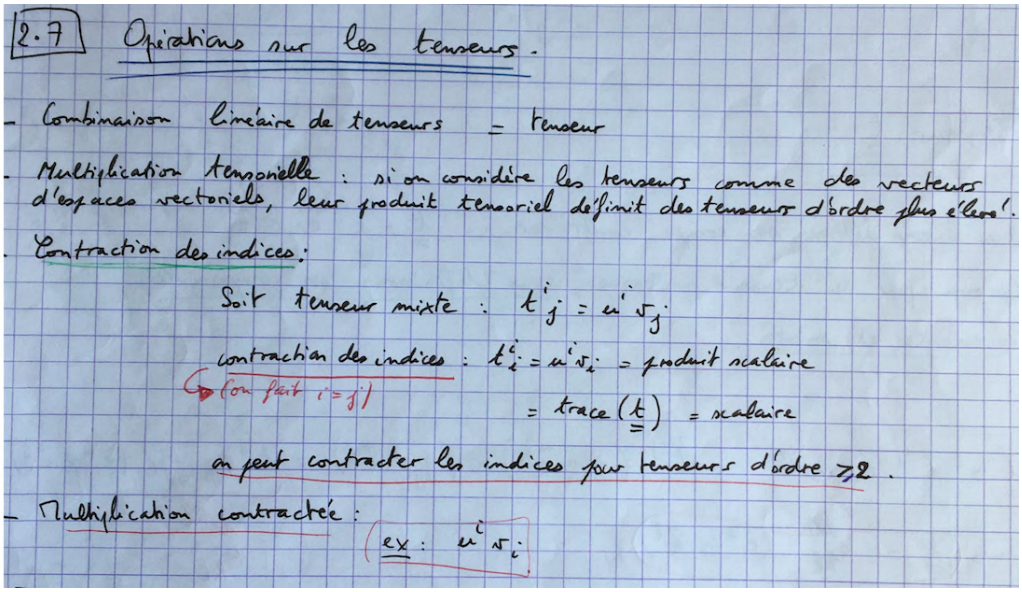
Rq : par extension, on obtient les formules du TD 2 pour passer des composantes t_{ij} à $t_i^{\,j}$ à t^{ij}

Dans ce cas-ci, on sait que $g^i_j = \vec{e}^{\,i} \cdot \vec{e}_j = \delta^i_j$

$\Rightarrow$ tenseur unité

$\Rightarrow$ les g^i_j sont les comp. mixtes de $\underline{\underline{g}}$.


• Tenseur $\underline{\underline{t}}$:
Nous avons défini ses comp. contravar. : $\underline{\underline{t}} = t^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$.
Comme pour le tenseur métrique, nous définissons ses composantes covariantes et mixtes .
$\underline{\underline{t}} = t^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = t^{ij}(g_{ik}\vec{e}^k) \otimes (g_{jl}\vec{e}^l) = t^{ij} g_{ik} g_{jl} (\vec{e}^k \otimes \vec{e}^l)$
t_{kl}
$\rightarrow \underline{\underline{t}} = t_{kl}(\vec{e}^k \otimes \vec{e}^l)$
$\underline{\underline{t}} = t^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = t^{ij}(g_{ik}\vec{e}^k) \otimes \vec{e}_j = t^{ij} g_{ik}\, \vec{e}^k \otimes \vec{e}_j$
t^j_k
abaissement 1er indice
$\rightarrow \underline{\underline{t}} = t^j_k(\vec{e}^k \otimes \vec{e}_j)$
• $\underline{\underline{t}} = t^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = t^{ij}\vec{e}_i \otimes (g_{jk}\vec{e}^k) = t^{ij} g_{jk}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}^k$
t^i_k
abaissement 2e indice
$\rightarrow \underline{\underline{t}} = t^i_k(\vec{e}_i \otimes \vec{e}^k)$



2.7 Opérations sur les tenseurs.

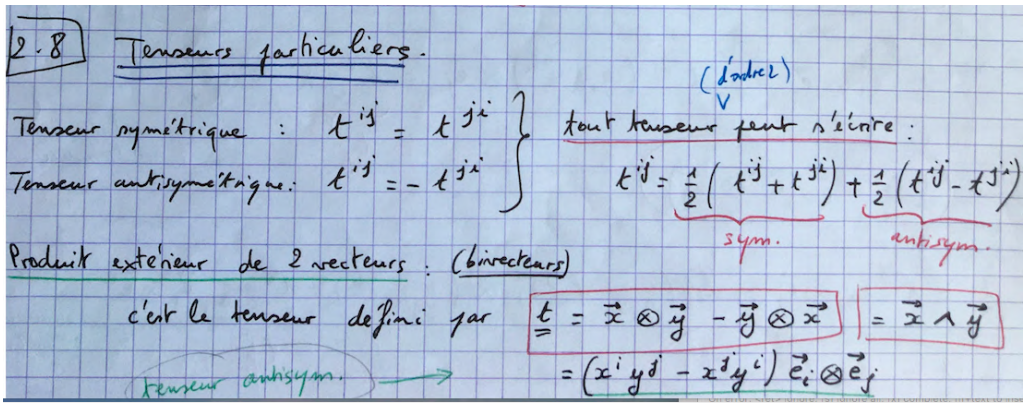
- Combinaison linéaire de tenseurs = tenseur
- Multiplication tensorielle : si on considère les tenseurs comme des vecteurs d'espaces vectoriels, leur produit tensoriel définit des tenseurs d'ordre plus élevé.
- Contraction des indices :

  Soit tenseur mixte : $t^i{}_j = u^i v_j$

  contraction des indices : $t^i{}_i = u^i v_i$ = produit scalaire (on fait $i=j$)

  $= \text{trace}(\underline{\underline{t}})$ = scalaire

  on peut contracter les indices pour tenseurs d'ordre ≥ 2.
- Multiplication contractée : ex : $u^i v_i$



2.8 Tenseurs particuliers.

Tenseur symétrique : $t^{ij} = t^{ji}$

Tenseur antisymétrique : $t^{ij} = -t^{ji}$

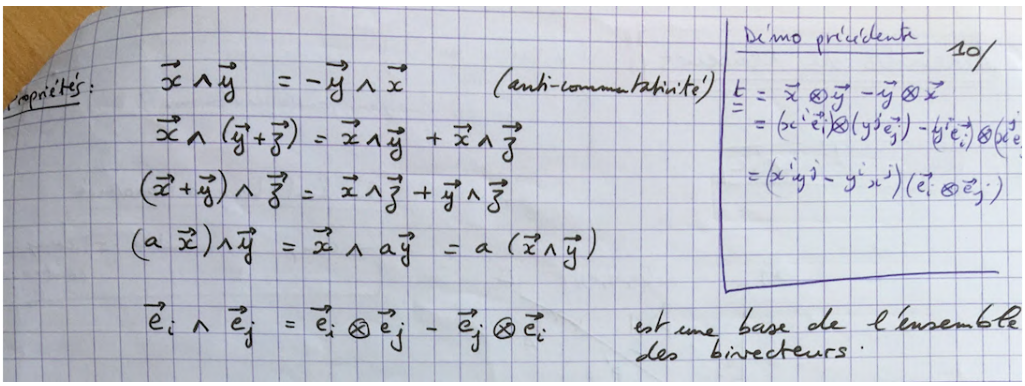
(d'ordre 2)

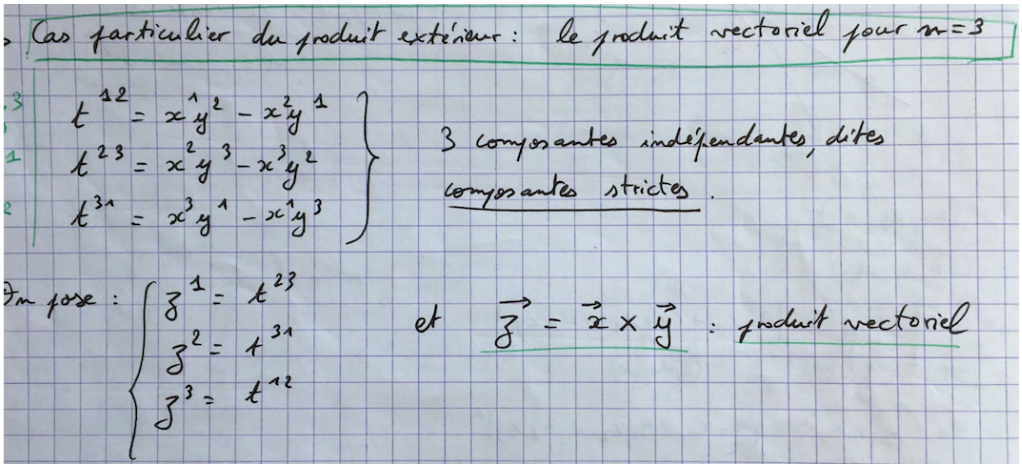
tout tenseur peut s'écrire : $t^{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}(t^{ij} + t^{ji})}_{\text{sym.}} + \underbrace{\frac{1}{2}(t^{ij} - t^{ji})}_{\text{antisym.}}$

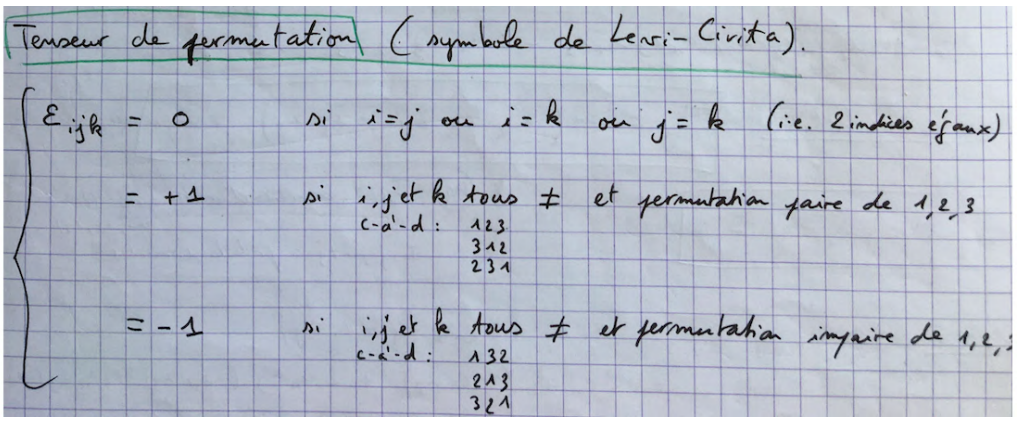
Produit extérieur de 2 vecteurs : (bivecteurs)

c'est le tenseur défini par $\underline{\underline{t}} = \vec{x} \otimes \vec{y} - \vec{y} \otimes \vec{x} = \vec{x} \wedge \vec{y}$

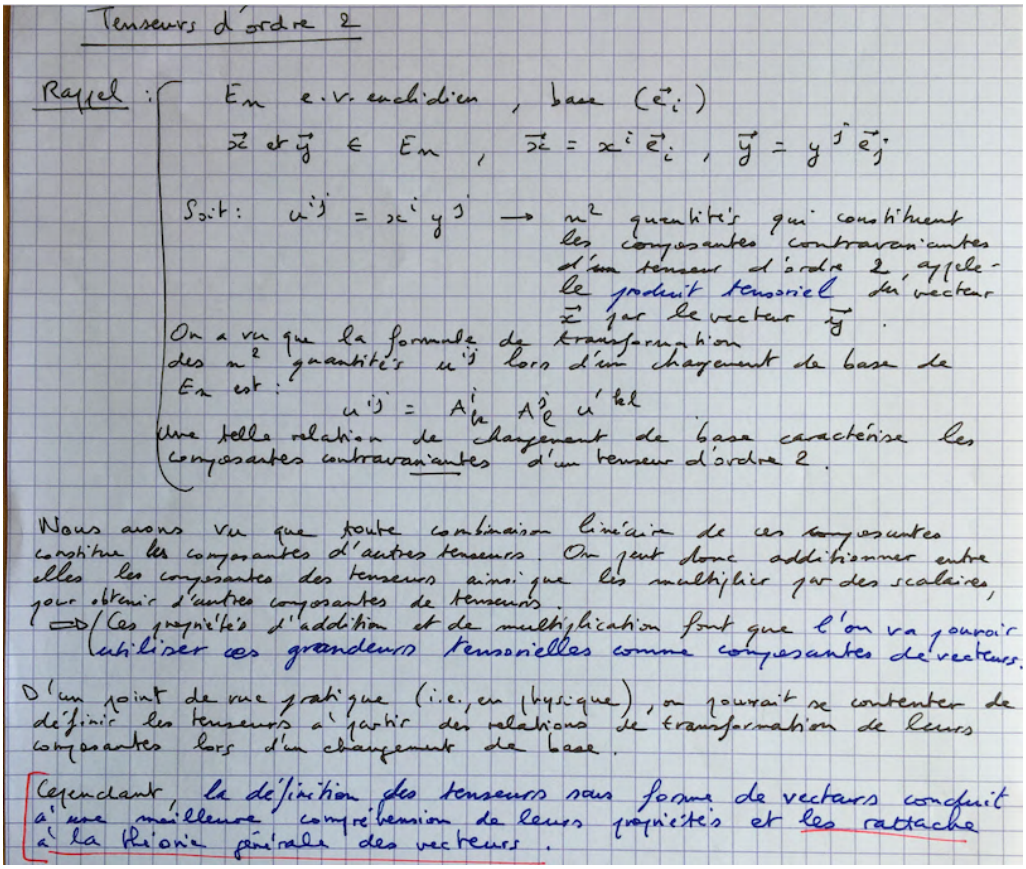
tenseur antisym. $= (x^i y^j - x^j y^i)\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$


propriétés :
$\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x}$ (anti-commutativité)
$\vec{x} \wedge (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \wedge \vec{y} + \vec{x} \wedge \vec{z}$
$(\vec{x} + \vec{y}) \wedge \vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{z} + \vec{y} \wedge \vec{z}$
$(a\,\vec{x}) \wedge \vec{y} = \vec{x} \wedge a\vec{y} = a\,(\vec{x} \wedge \vec{y})$
$\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j - \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i$
est une base de l'ensemble des bivecteurs.
Démo précédente 10/
$\underline{\underline{t}} = \vec{x} \otimes \vec{y} - \vec{y} \otimes \vec{x}$
$= (x^i \vec{e}_i) \otimes (y^j \vec{e}_j) - (y^i \vec{e}_i) \otimes (x^j \vec{e}_j)$
$= (x^i y^j - y^i x^j)(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$


Cas particulier du produit extérieur : le produit vectoriel pour $n = 3$
$t^{12} = x^1 y^2 - x^2 y^1$
$t^{23} = x^2 y^3 - x^3 y^2$
$t^{31} = x^3 y^1 - x^1 y^3$
3 composantes indépendantes, dites composantes strictes.
On pose : $z^1 = t^{23}$, $z^2 = t^{31}$, $z^3 = t^{12}$
et $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$: produit vectoriel


Tenseur de permutation (symbole de Levi-Civita).
$\varepsilon_{ijk} = 0$ si $i=j$ ou $i=k$ ou $j=k$ (i.e. 2 indices égaux)
$= +1$ si i,j et k tous $\neq$ et permutation paire de 1,2,3
c-à-d : 123, 312, 231
$= -1$ si i,j et k tous $\neq$ et permutation impaire de 1,2,3
c-à-d : 132, 213, 321

Complément d'algèbre tensorielle:



Tenseurs d'ordre 2

Rappel : E_n e.v. euclidien, base $(\vec{e}_i)$

$\vec{x}$ et $\vec{y} \in E_n$, $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$, $\vec{y} = y^j \vec{e}_j$

Soit : $u^{ij} = x^i y^j$ → n^2 quantités qui constituent les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre 2, appelé le produit tensoriel des vecteurs $\vec{x}$ par le vecteur $\vec{y}$.

On a vu que la formule de transformation des n^2 grandeurs u^{ij} lors d'un changement de base de E_n est :

$$u'^{kl} = A^k_i \, A^l_j \, u^{ij}$$

Une telle relation de changement de base caractérise les composantes contravariantes d'un tenseur d'ordre 2.

Nous avons vu que toute combinaison linéaire de ces composantes constitue les composantes d'autres tenseurs. On peut donc additionner entre elles les composantes des tenseurs ainsi que les multiplier par des scalaires, pour obtenir d'autres composantes de tenseurs.

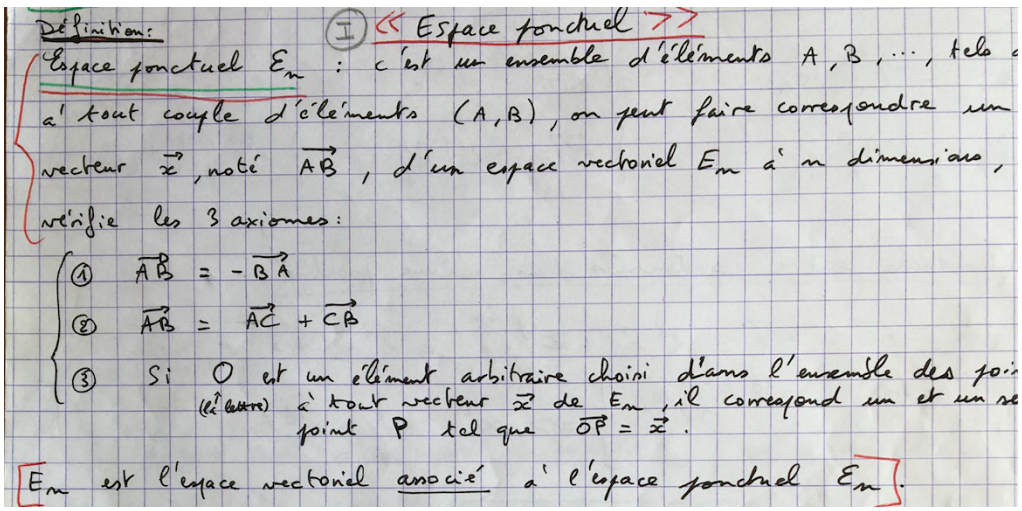
⇒ Ces propriétés d'addition et de multiplication font que l'on va pouvoir utiliser ces grandeurs tensorielles comme composantes de vecteurs.

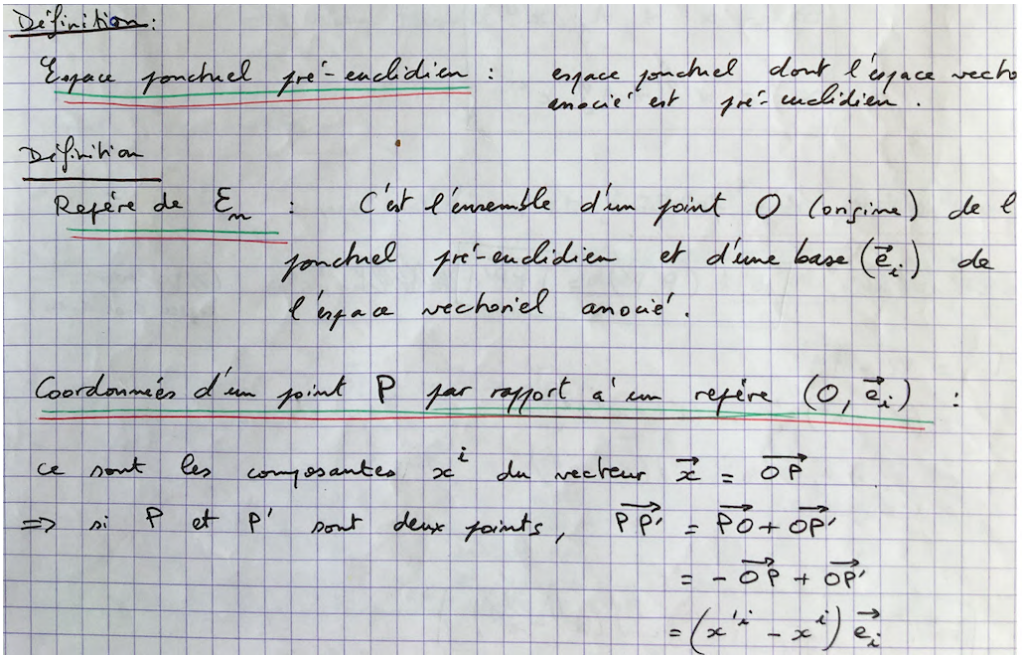
D'un point de vue pratique (i.e., en physique), on pourrait se contenter de définir les tenseurs à partir des relations de transformation de leurs composantes lors d'un changement de base.

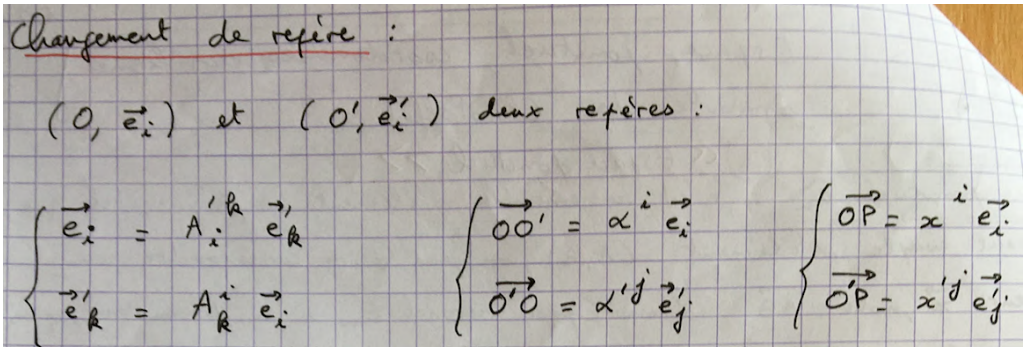
Cependant, la définition des tenseurs sous forme de vecteurs conduit à une meilleure compréhension de leurs propriétés et les rattache à la théorie générale des vecteurs.

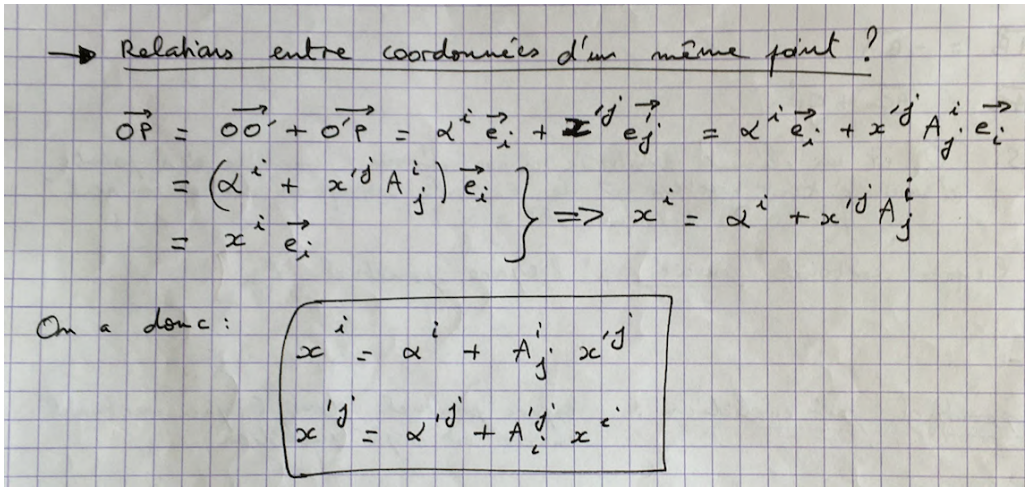
Chapter 4

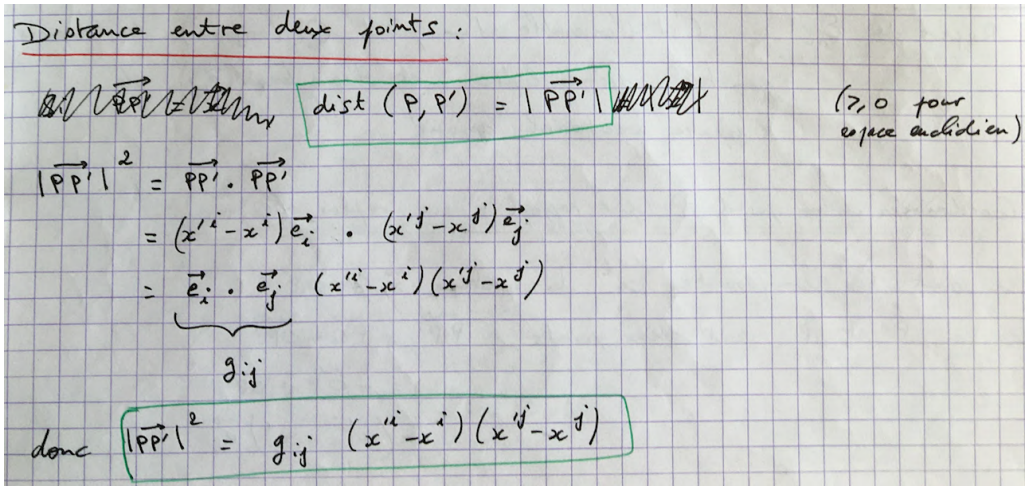
Espace ponctuel, coordonnées curvilignes, symboles de Christoffel

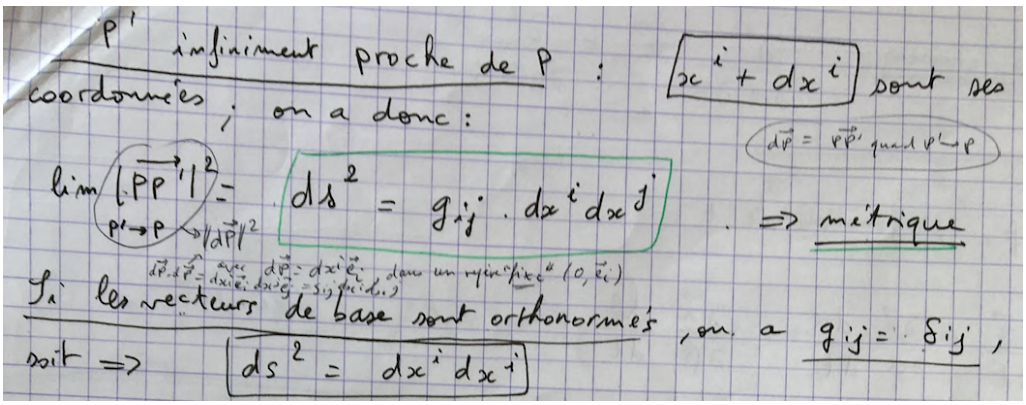


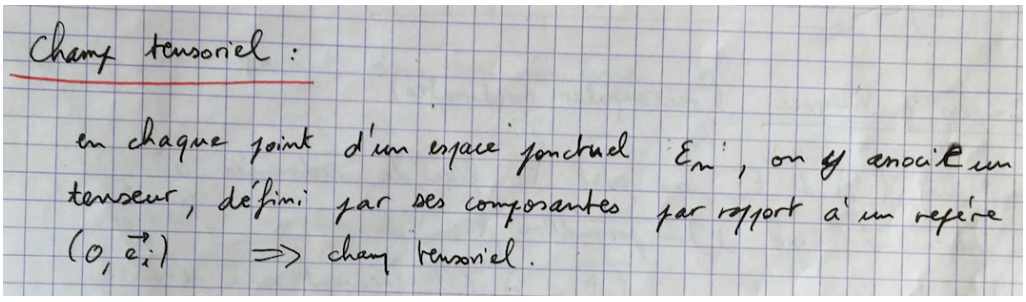

Définition :
Espace ponctuel pré-euclidien : espace ponctuel dont l'espace vecto
associé est pré-euclidien.
Définition
Repère de $\mathcal{E}_n$: C'est l'ensemble d'un point O (origine) de l
ponctuel pré-euclidien et d'une base $(\vec{e}_i)$ de
l'espace vectoriel associé.
Coordonnées d'un point P par rapport à un repère $(O, \vec{e}_i)$:
ce sont les composantes x^i du vecteur $\vec{x} = \overrightarrow{OP}$
⇒ si P et P' sont deux points, $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OP'}$
$= -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}$
$= (x'^i - x^i)\vec{e}_i$

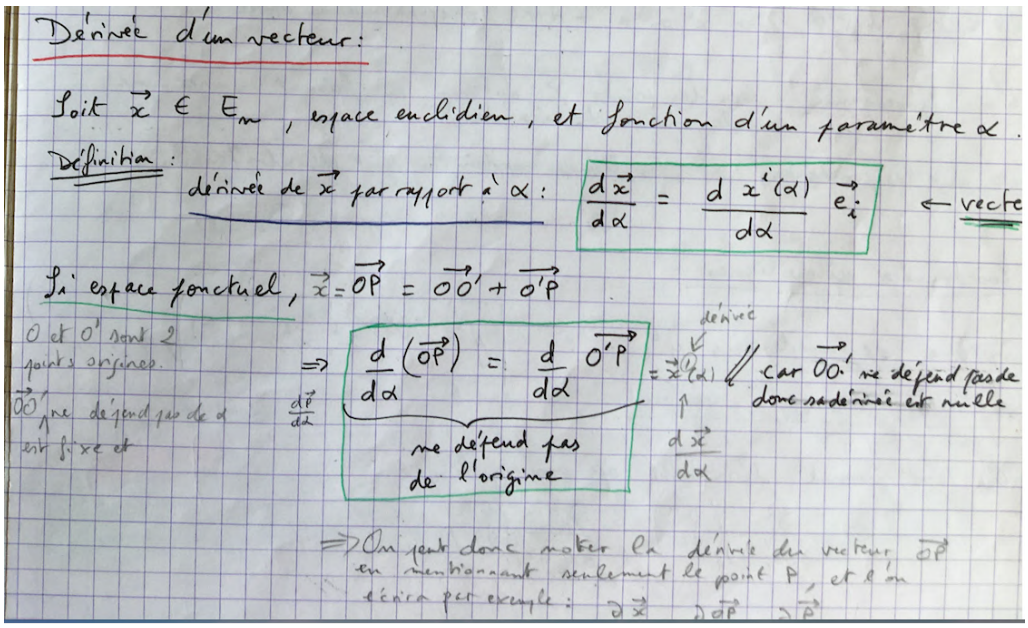

Changement de repère :
$(O, \vec{e}_i)$ et $(O', \vec{e}'_i)$ deux repères :
$\begin{cases} \vec{e}_i = A_i^{'k} \vec{e}'_k \\ \vec{e}'_k = A_k^i \vec{e}_i \end{cases}$
$\begin{cases} \overrightarrow{OO'} = \alpha^i \vec{e}_i \\ \overrightarrow{O'O} = \alpha'^j \vec{e}'_j \end{cases}$
$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = x^i \vec{e}_i \\ \overrightarrow{O'P} = x'^j \vec{e}'_j \end{cases}$

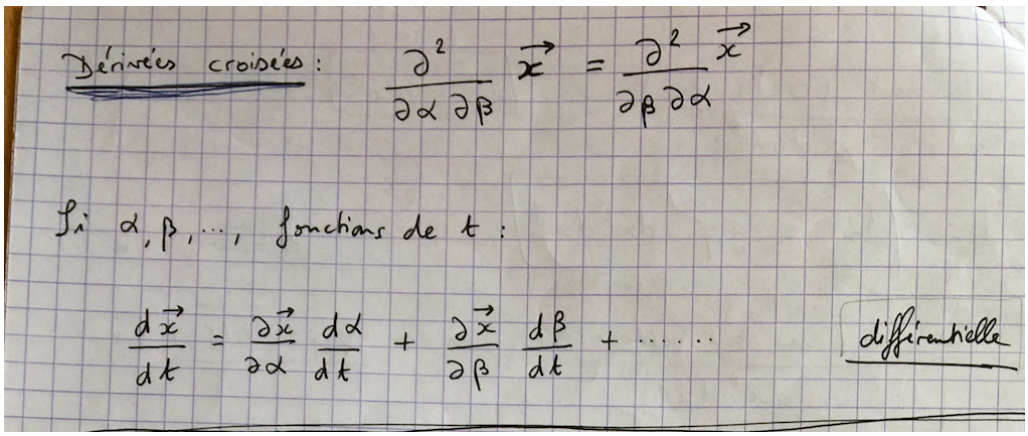

Relations entre coordonnées d'un même point ?
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = \alpha^i \vec{e}_i + x'^j \vec{e}_j = \alpha^i \vec{e}_i + x'^j A^i_j \vec{e}_i$
$= (\alpha^i + x'^j A^i_j) \vec{e}_i$
$= x^i \vec{e}_i$
$\Rightarrow x^i = \alpha^i + x'^j A^i_j$
On a donc :
$x^i = \alpha^i + A^i_j x'^j$
$x'^j = \alpha'^j + A'^j_i x^i$

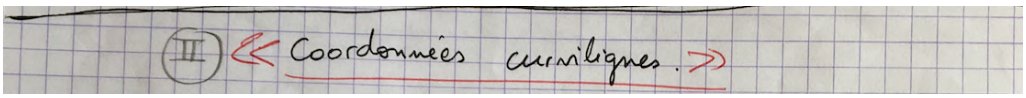

Distance entre deux points :
$dist(P,P') = |\overrightarrow{PP'}|$
(≥ 0 pour espace euclidien)
$|\overrightarrow{PP'}|^2 = \overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{PP'}$
$= (x'^i - x^i) \vec{e}_i \cdot (x'^j - x^j) \vec{e}_j$
$= \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \, (x'^i - x^i)(x'^j - x^j)$
g_{ij}
donc $|\overrightarrow{PP'}|^2 = g_{ij} (x'^i - x^i)(x'^j - x^j)$

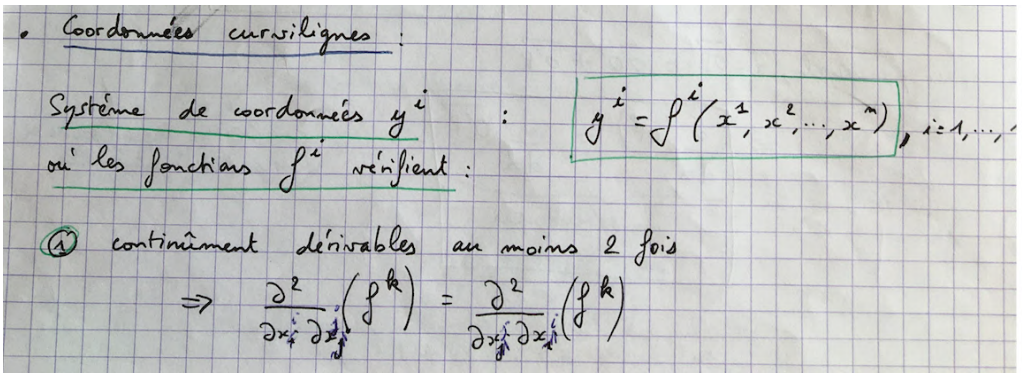

P' infiniment proche de P : $x^i + dx^i$ sont ses coordonnées, on a donc :
$\lim_{P' \to P} \|\overrightarrow{PP'}\|^2 = \|\overrightarrow{dP}\|^2$
$ds^2 = g_{ij} \cdot dx^i dx^j$
$\Rightarrow$ métrique
$\overrightarrow{dP} = \overrightarrow{PP'}$ quand $P' \to P$
$\overrightarrow{dP} \cdot \overrightarrow{dP} = dx^i \vec{e}_i \cdot dx^j \vec{e}_j = \delta_{ij} dx^i dx^j$
avec $\overrightarrow{dP} = dx^i \vec{e}_i$ dans un repère fixe $(O, \vec{e}_i)$
Si les vecteurs de base sont orthonormés, on a $g_{ij} = \delta_{ij}$,
soit $\Rightarrow$ $ds^2 = dx^i dx^i$

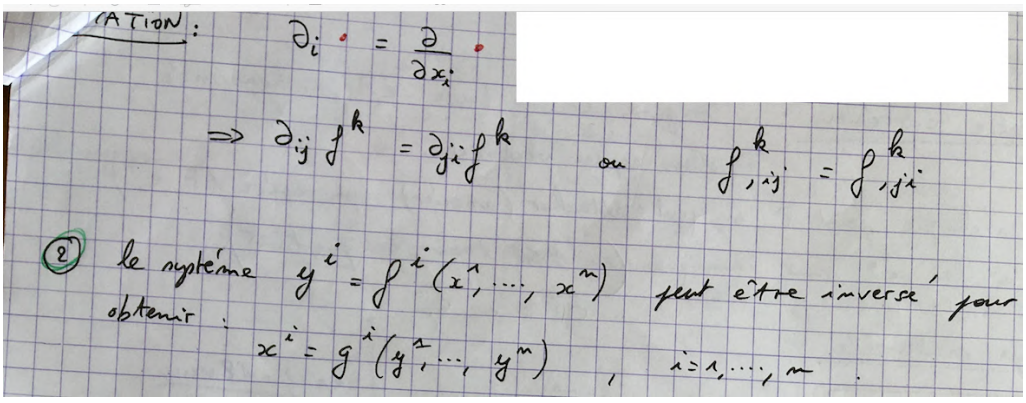

Champ tensoriel :
en chaque point d'un espace ponctuel $\mathcal{E}_n$, on y associe un tenseur, défini par ses composantes par rapport à un repère $(O, \vec{e}_i)$ $\Rightarrow$ champ tensoriel.

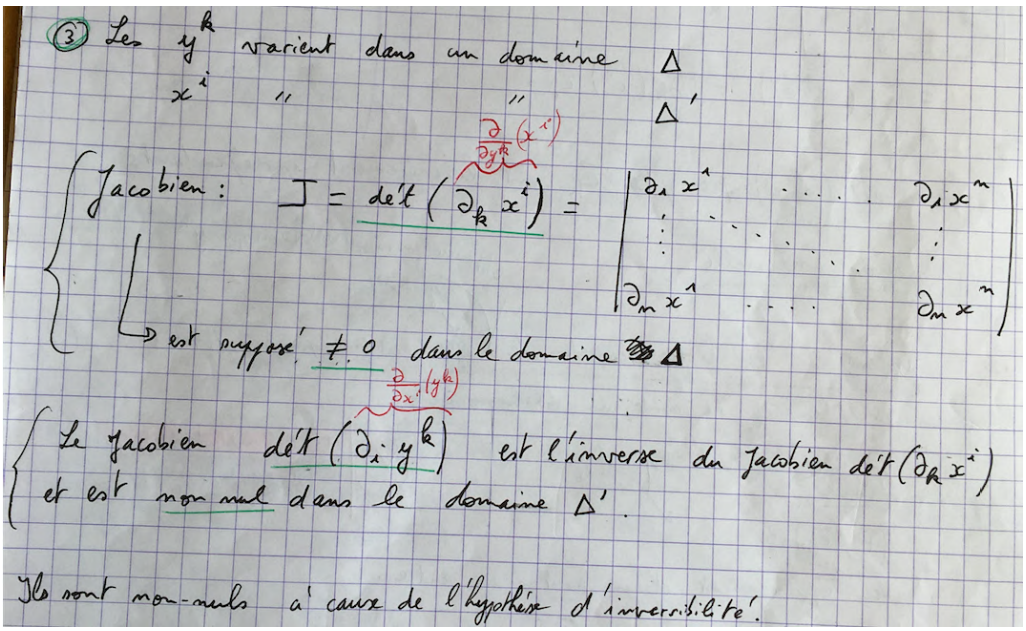

Dérivée d'un vecteur :
Soit $\vec{x} \in E_m$, espace euclidien, et fonction d'un paramètre α.
Définition :
dérivée de $\vec{x}$ par rapport à α : $\frac{d\vec{x}}{d\alpha} = \frac{d\, x^i(\alpha)}{d\alpha}\, \vec{e}_i$ ← vecte
Si espace ponctuel, $\vec{x} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$
O et O' sont 2 points origines.
$\overrightarrow{OO'}$ ne dépend pas de α car O fixe et
$\Rightarrow \frac{d}{d\alpha}(\overrightarrow{OP}) = \frac{d}{d\alpha}\overrightarrow{O'P}$
ne dépend pas de l'origine
dérivée
$= \vec{x}'(\alpha)$ // car $\overrightarrow{OO'}$ ne dépend pas de α donc sa dérivée est nulle
$\frac{d\vec{P}}{d\alpha}$
$\frac{d\vec{x}}{d\alpha}$
⇒ On peut donc noter la dérivée du vecteur $\overrightarrow{OP}$ en mentionnant seulement le point P, et l'on écrira par exemple : $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{P}}$ $\frac{\partial \overrightarrow{OP}}{\partial \vec{P}}$

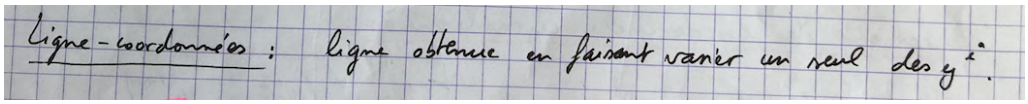

Dérivées croisées : $\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\vec{x} = \frac{\partial^2}{\partial\beta\,\partial\alpha}\vec{x}$
Si $\alpha, \beta, \cdots$, fonctions de t :
$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial\vec{x}}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} + \cdots\cdots$
différentielle

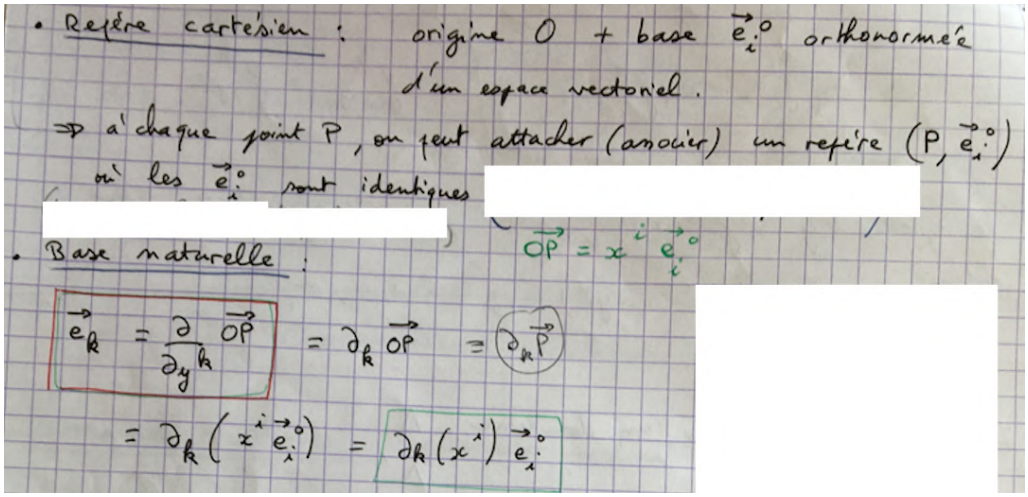

III
Coordonnées curvilignes.

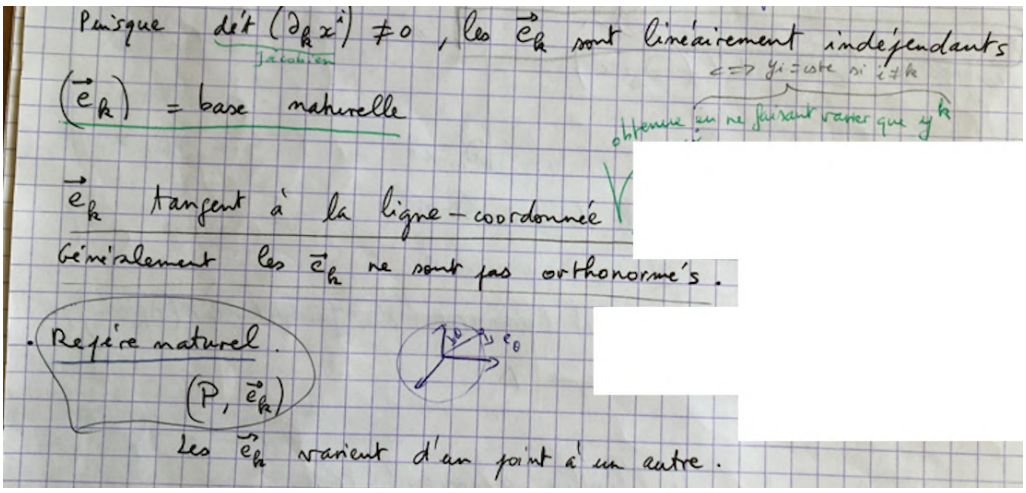

Coordonnées curvilignes :
Système de coordonnées y^i : $y^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^m)$, $i = 1, \dots,$
où les fonctions f^i vérifient :
① continûment dérivables au moins 2 fois
$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k}(f^k) = \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^j}(f^k)$

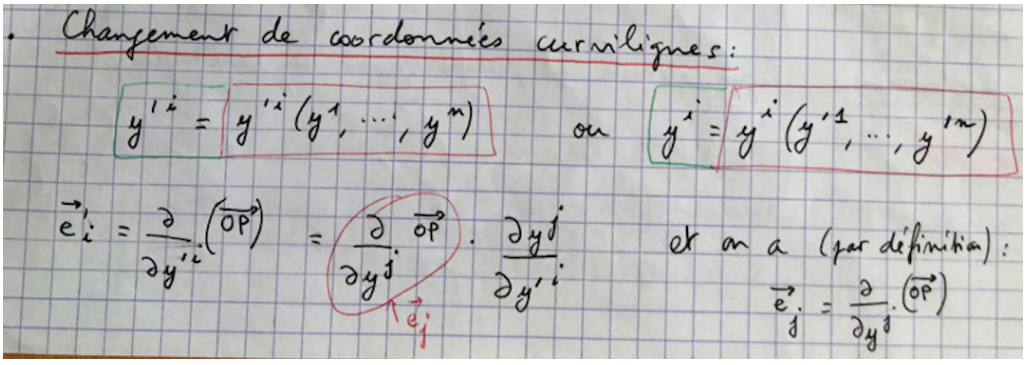

ATION : $\partial_i \cdot = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot$
$\Rightarrow \partial_{ij} f^k = \partial_{ji} f^k$ ou $f^k_{,ij} = f^k_{,ji}$
② le système $y^i = f^i(x^1, \dots, x^m)$ peut être inversé pour obtenir :
$x^i = g^i(y^1, \dots, y^m)$, $i = 1, \dots, m$.

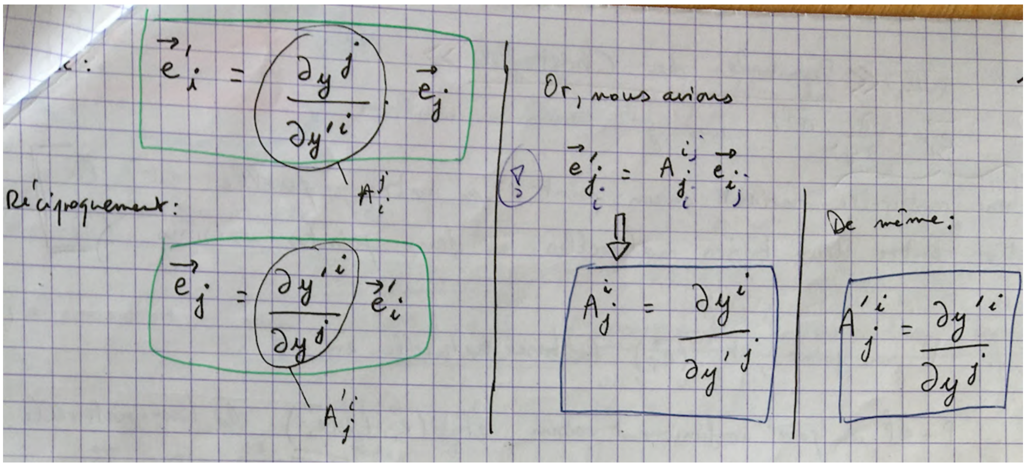

③ Les y^k varient dans un domaine Δ
x^i " " Δ'
Jacobien : $J = \det\left(\partial_k x^i\right) = \begin{vmatrix} \partial_1 x^1 & \cdots & \partial_1 x^n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n x^1 & \cdots & \partial_n x^n \end{vmatrix}$
$\frac{\partial}{\partial y^k}(x^i)$
est supposé $\neq 0$ dans le domaine Δ
$\frac{\partial}{\partial x^i}(y^k)$
Le jacobien $\det\left(\partial_i y^k\right)$ est l'inverse du jacobien $\det(\partial_k x^i)$
et est non nul dans le domaine Δ'.
Ils sont non-nuls à cause de l'hypothèse d'inversibilité.


Ligne-coordonnées : ligne obtenue en faisant varier un seul des y^i.


• Repère cartésien : origine O + base $\vec{e}_i^{\,0}$ orthonormée
d'un espace vectoriel.
⇒ à chaque point P, on peut attacher (associer) un repère $(P, \vec{e}_i^{\,0})$
où les $\vec{e}_i^{\,0}$ sont identiques
$\overrightarrow{OP} = x^i \vec{e}_i^{\,0}$
• Base naturelle :
$\vec{e}_k = \frac{\partial}{\partial y^k}\overrightarrow{OP} = \partial_k \overrightarrow{OP} = \partial_k \vec{P}$
$= \partial_k\left(x^i \vec{e}_i^{\,0}\right) = \partial_k(x^i)\,\vec{e}_i^{\,0}$


Puisque dét $(\partial_k x^i) \neq 0$, les $\vec{e}_k$ sont linéairement indépendants
jacobien
$\Leftrightarrow y_i = cste$ si $i \neq k$
$(\vec{e}_k)$ = base naturelle
obtenue en ne faisant varier que y^k
$\vec{e}_k$ tangent à la ligne-coordonnée
Généralement les $\vec{e}_k$ ne sont pas orthonormés.
Repère naturel.
$(P, \vec{e}_k)$
Les $\vec{e}_k$ varient d'un point à un autre.


Changement de coordonnées curvilignes:
$y'^i = y'^i(y^1, \cdots, y^n)$ ou $y^i = y^i(y'^1, \cdots, y'^n)$
$\vec{e}'_i = \frac{\partial}{\partial y'^i}(\overrightarrow{OP}) = \frac{\partial}{\partial y^j}\overrightarrow{OP} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial y'^i}$
$\vec{e}_j$
et on a (par définition): $\vec{e}_j = \frac{\partial}{\partial y^j}(\overrightarrow{OP})$



$\vec{e}'_i = \dfrac{\partial y^j}{\partial y'^i} \, \vec{e}_j$ (A^j_i)

Réciproquement :

$\vec{e}_j = \dfrac{\partial y'^i}{\partial y^j} \, \vec{e}'_i$ (A'^i_j)

Or, nous avions

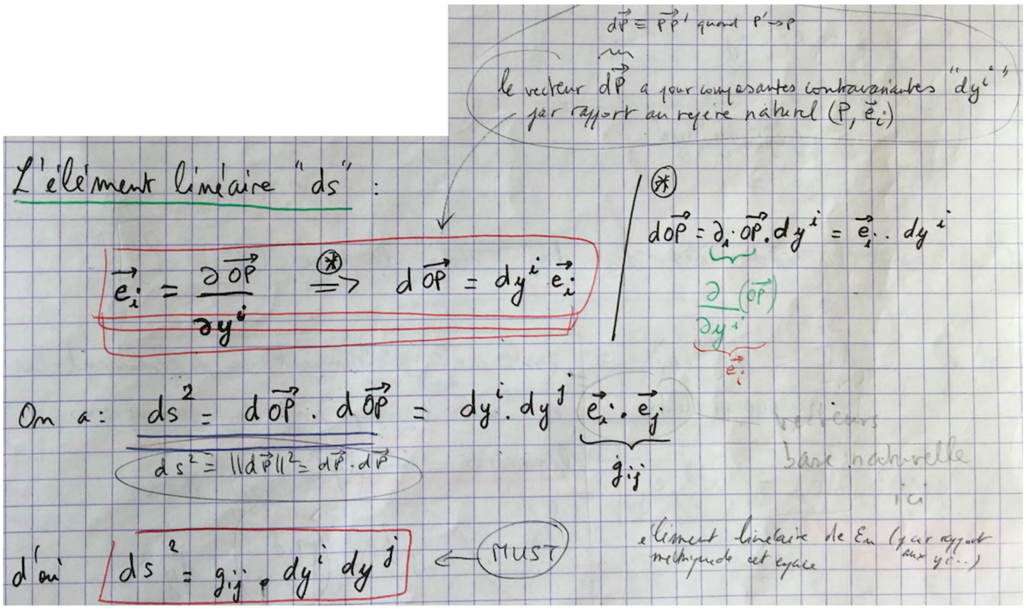
$\vec{e}'_j = A^i_j \, \vec{e}_i$

$\Downarrow$

$A^i_j = \dfrac{\partial y^i}{\partial y'^j}$

De même :

$A'^i_j = \dfrac{\partial y'^i}{\partial y^j}$



$d\vec{P} \equiv \vec{PP'}$ quand $P' \to P$

le vecteur $d\vec{P}$ a pour composantes contravariantes "dy^i" par rapport au repère naturel $(P, \vec{e}_i)$

L'élément linéaire "ds" :

$\vec{e}_i = \dfrac{\partial \vec{OP}}{\partial y^i} \overset{(*)}{\Longrightarrow} d\vec{OP} = dy^i \, \vec{e}_i$

(*) $d\vec{OP} = \partial_i \vec{OP} \cdot dy^i = \vec{e}_i \cdot dy^i$; $\partial_i \vec{OP} = \dfrac{\partial (\vec{OP})}{\partial y^i} = \vec{e}_i$

On a : $ds^2 = d\vec{OP} \cdot d\vec{OP} = dy^i \cdot dy^j \, \underbrace{\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j}_{g_{ij}}$

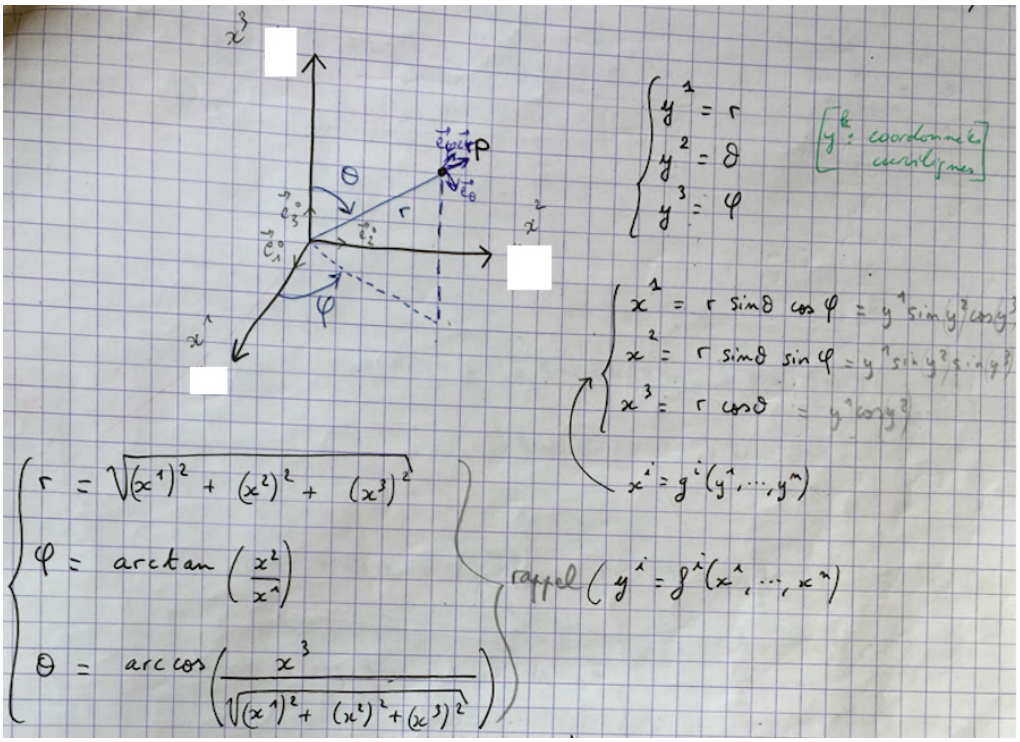
$ds^2 = \|d\vec{P}\|^2 = d\vec{P} \cdot d\vec{P}$

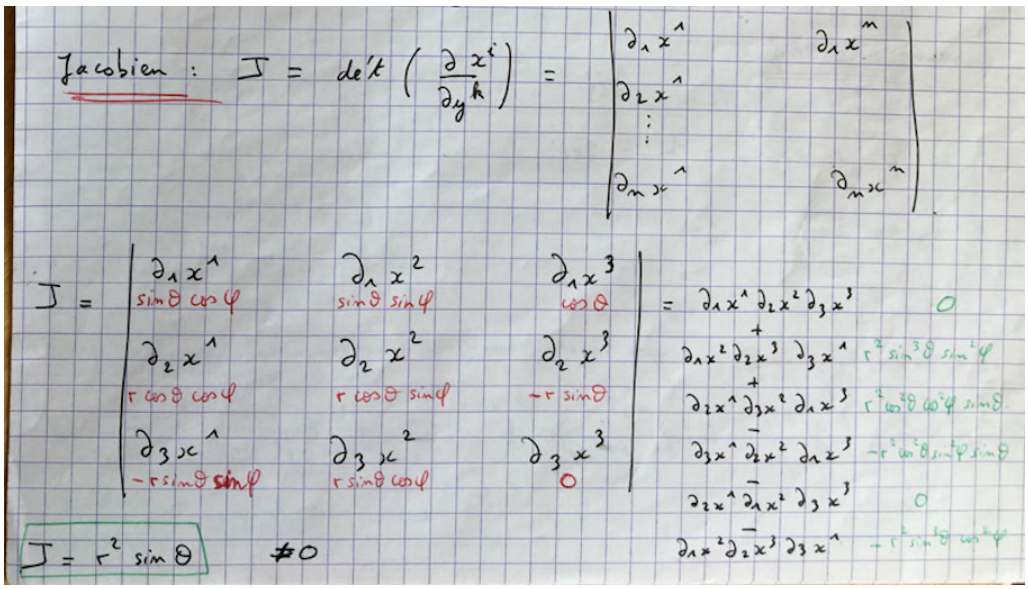
vecteurs base naturelle ici

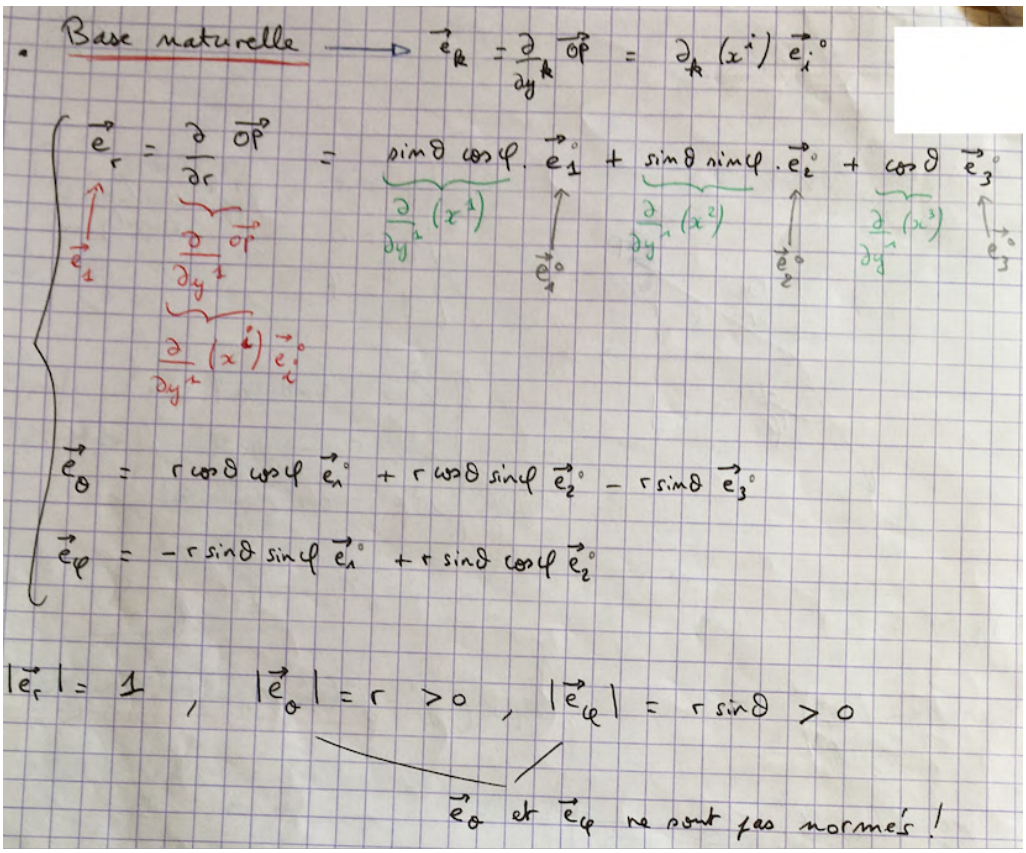
d'où $ds^2 = g_{ij} \, dy^i \, dy^j$ ← MUST

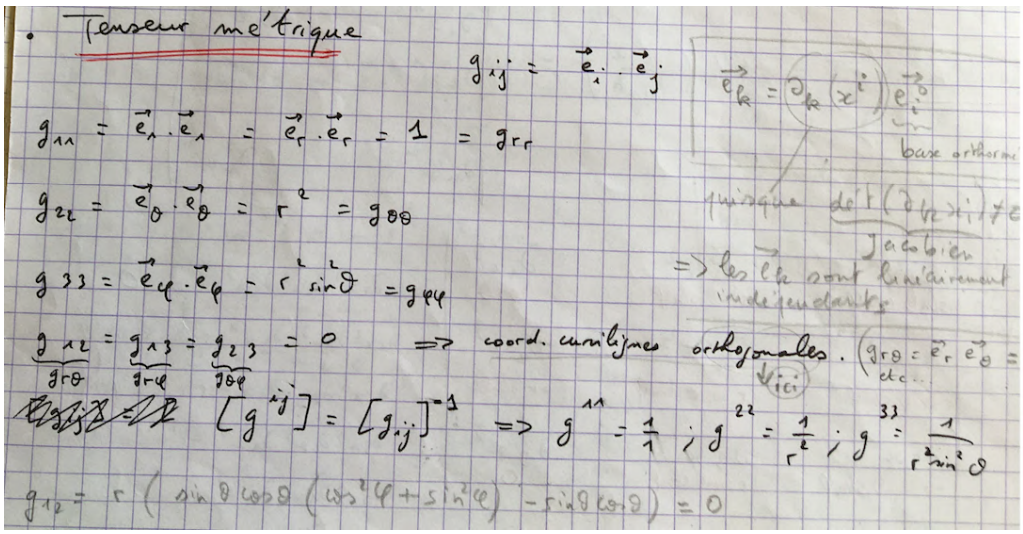
élément linéaire de E_n (par rapport aux y^i...) métrique de cet espace

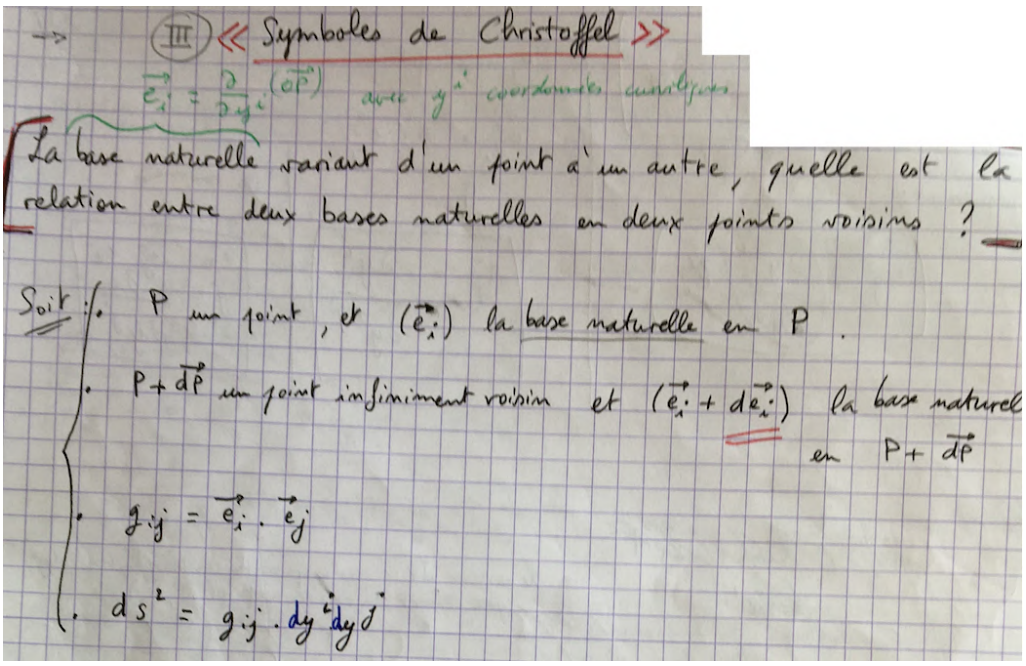
Exemple : les coordonnées sphériques

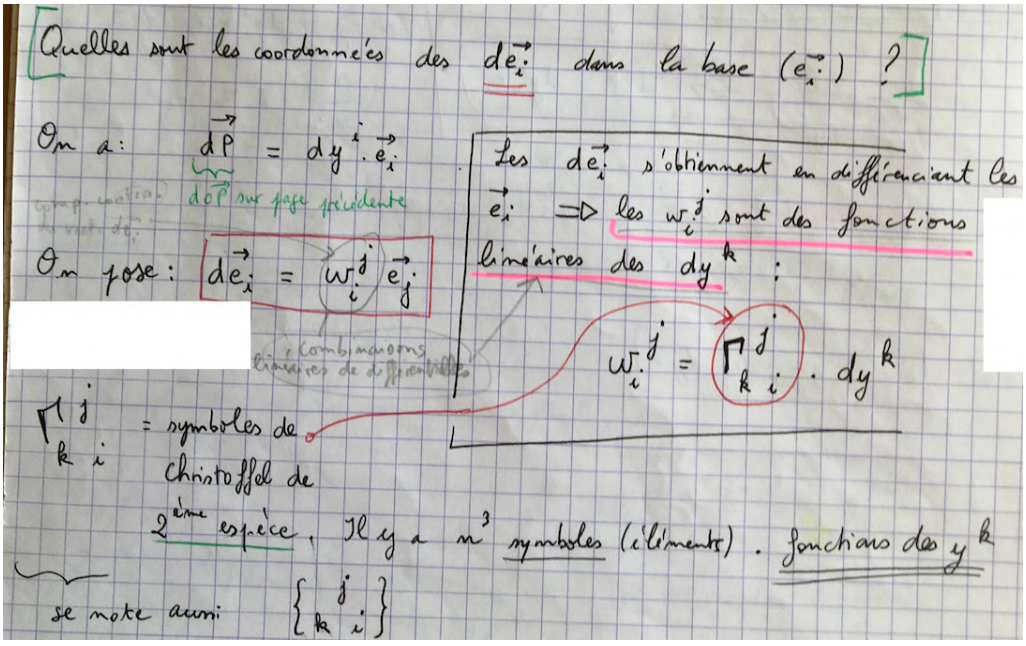



Jacobien : $J = det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\right) = \begin{vmatrix} \partial_1 x^1 & \partial_1 x^m \\ \partial_2 x^1 & \\ \vdots & \\ \partial_m x^1 & \partial_m x^m \end{vmatrix}$
$J = \begin{vmatrix} \partial_1 x^1 & \partial_1 x^2 & \partial_1 x^3 \\ \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \partial_2 x^1 & \partial_2 x^2 & \partial_2 x^3 \\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ \partial_3 x^1 & \partial_3 x^2 & \partial_3 x^3 \\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$
$= \partial_1 x^1 \partial_2 x^2 \partial_3 x^3 \; 0$
$+ \partial_1 x^2 \partial_2 x^3 \partial_3 x^1 \; r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi$
$+ \partial_2 x^1 \partial_3 x^2 \partial_1 x^3 \; r^2\cos^2\theta\cos^2\varphi\sin\theta$
$- \partial_3 x^1 \partial_2 x^2 \partial_1 x^3 \; -r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi\sin\theta$
$- \partial_2 x^1 \partial_1 x^2 \partial_3 x^3 \; 0$
$- \partial_1 x^2 \partial_2 x^3 \partial_3 x^1 \; -r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi$
$J = r^2\sin\theta \quad \neq 0$


Base naturelle
$\vec{e}_k = \frac{\partial}{\partial y^k} \overrightarrow{OP} = \partial_k (x^i)\, \vec{e}_i^{\,\circ}$
$\vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial r} \overrightarrow{OP} = \sin\theta\cos\varphi\, \vec{e}_1^{\,\circ} + \sin\theta\sin\varphi\, \vec{e}_2^{\,\circ} + \cos\theta\, \vec{e}_3^{\,\circ}$
$\vec{e}_\theta = r\cos\theta\cos\varphi\, \vec{e}_1^{\,\circ} + r\cos\theta\sin\varphi\, \vec{e}_2^{\,\circ} - r\sin\theta\, \vec{e}_3^{\,\circ}$
$\vec{e}_\varphi = -r\sin\theta\sin\varphi\, \vec{e}_1^{\,\circ} + r\sin\theta\cos\varphi\, \vec{e}_2^{\,\circ}$
$|\vec{e}_r| = 1$, $|\vec{e}_\theta| = r > 0$, $|\vec{e}_\varphi| = r\sin\theta > 0$
$\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ ne sont pas normés !


Tenseur métrique
$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$
$\vec{e}_k = \partial_k(x^i)\vec{e}_i$
base orthonormée
$g_{11} = \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r = 1 = g_{rr}$
$g_{22} = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = r^2 = g_{\theta\theta}$
$g_{33} = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = r^2 \sin^2\theta = g_{\varphi\varphi}$
$g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$ $\Rightarrow$ coord. curvilignes orthogonales
$[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}$ $\Rightarrow g^{11} = \frac{1}{1}$; $g^{22} = \frac{1}{r^2}$; $g^{33} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta}$
$g_{12} = r(\sin\theta\cos\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - \sin\theta\cos\theta) = 0$
$\det(\partial_k x^i) \neq 0$
Jacobien
$\Rightarrow$ les $\vec{e}_k$ sont linéairement indépendants


III « Symboles de Christoffel »
$\vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial y^i}(\vec{OP})$ avec y^i coordonnées curvilignes
La base naturelle variant d'un point à un autre, quelle est la relation entre deux bases naturelles en deux points voisins ?
Soit :
• P un point, et $(\vec{e}_i)$ la base naturelle en P.
• $P+\vec{dP}$ un point infiniment voisin et $(\vec{e}_i + d\vec{e}_i)$ la base naturel en $P+\vec{dP}$
• $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$
• $ds^2 = g_{ij}\, dy^i dy^j$


Quelles sont les coordonnées des $d\vec{e}_i$ dans la base $(\vec{e}_i)$?
On a : $\vec{dP} = dy^i \cdot \vec{e}_i$
$\vec{dOP}$ sur page précédente
On pose : $d\vec{e}_i = w_i^j \vec{e}_j$
combinaisons linéaires de différentielles
Les $d\vec{e}_i$ s'obtiennent en différenciant les $\vec{e}_i$ ⇒ les w_i^j sont des fonctions linéaires des dy^k :
$w_i^j = \Gamma_{ki}^{j} \cdot dy^k$
Γ_{ki}^{j} = symboles de Christoffel de 2ème espèce. Il y a n^3 symboles (éléments). fonctions des y^k
se note aussi $\left\{ {j \atop k\ i} \right\}$

[Com]ment déterminer les $\Gamma_k{}^j{}_i$ à partir des g_{ij} ? 15/

① Relation entre les Γ_{ijk}

On considère : $\omega_{ji} = \vec{e}_j \cdot d\vec{e}_i$ (comp. cova. du vect. $d\vec{e}_i$)

$u_k = \vec{u} \cdot \vec{e}_k$ (page 2, chapitre 1)

$d\vec{e}_i = \vec{u}$, $\quad \vec{u} = u_j \vec{e}^j = \omega_{\cdot j} \vec{e}^j$ (cova.), $\quad \vec{u} = u^j \vec{e}_j = \omega^j_{\cdot i} \vec{e}_j$ (comp. contra. de $\vec{u}$ i.e. de $d\vec{e}_i$)

$u_k = \vec{e}_k \cdot d\vec{e}_i$

$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{e}_k = \omega^j_i \, \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \omega_{ik} = \omega_{ki}$

(composantes covariantes correspondant aux ω^j_i)

et $\omega_{ji} = \Gamma_{kji} \, dy^k$

Γ_{kji} : symboles de Christoffel de 1ère espèce

$\omega_{ji} = \vec{e}_j \cdot d\vec{e}_i = \omega_i^l \, \vec{e}_j \cdot \vec{e}_l$ (avec $d\vec{e}_i = \omega_i^l \vec{e}_l$ et $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_l = g_{jl}$)

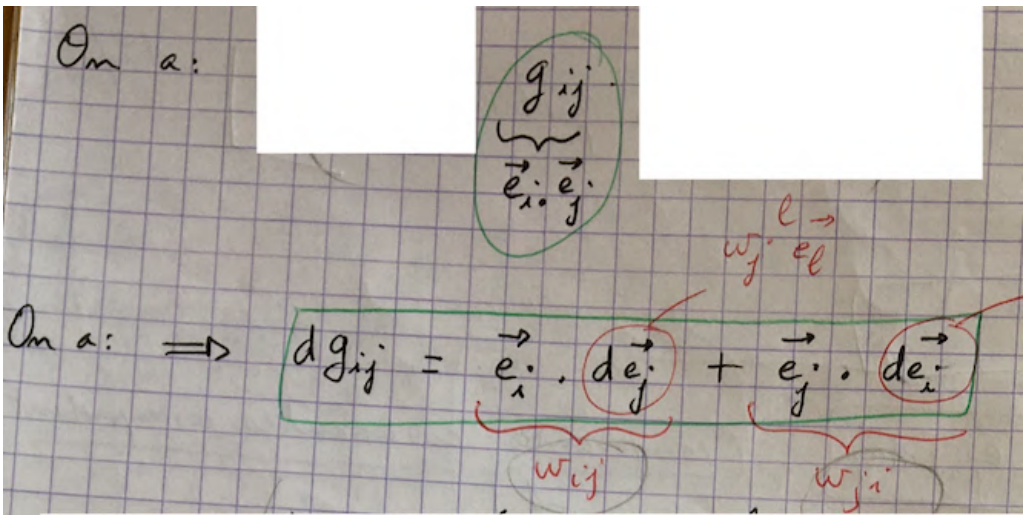
$$\Rightarrow \omega_{ji} = g_{jl} \, \omega_i^l = g_{jl} \, \Gamma_k{}^l{}_i \, dy^k = \Gamma_{kji} \, dy^k$$

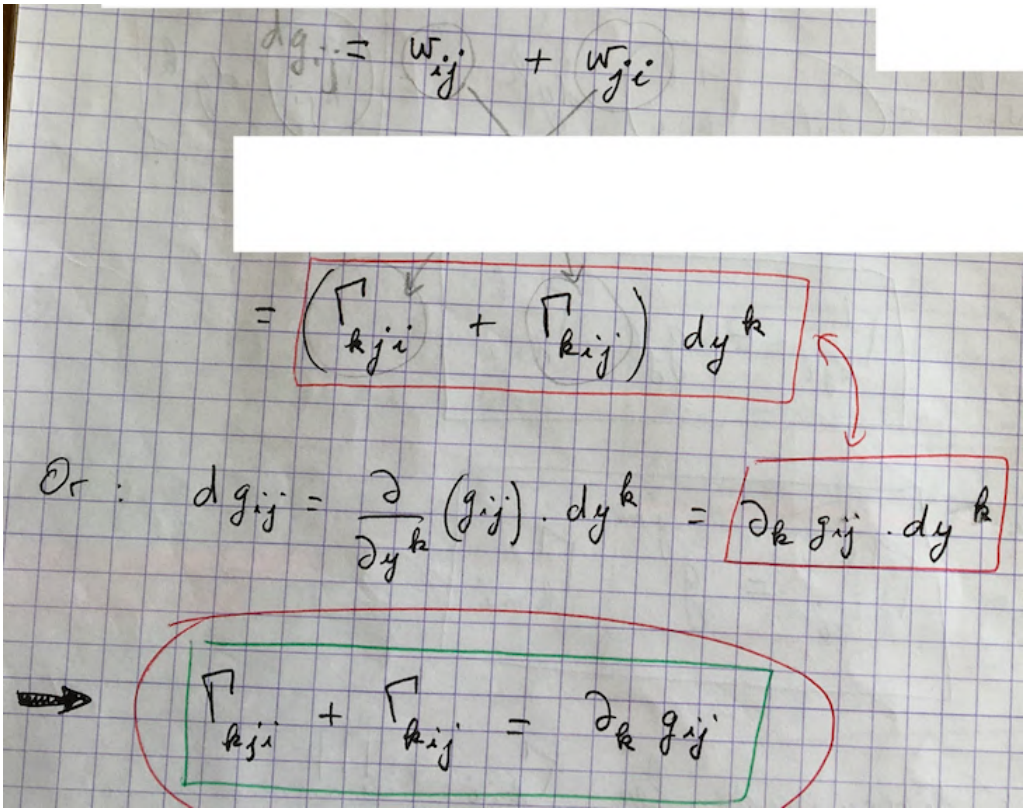
$$\Gamma_{kji} = g_{jl} \, \Gamma_k{}^l{}_i$$

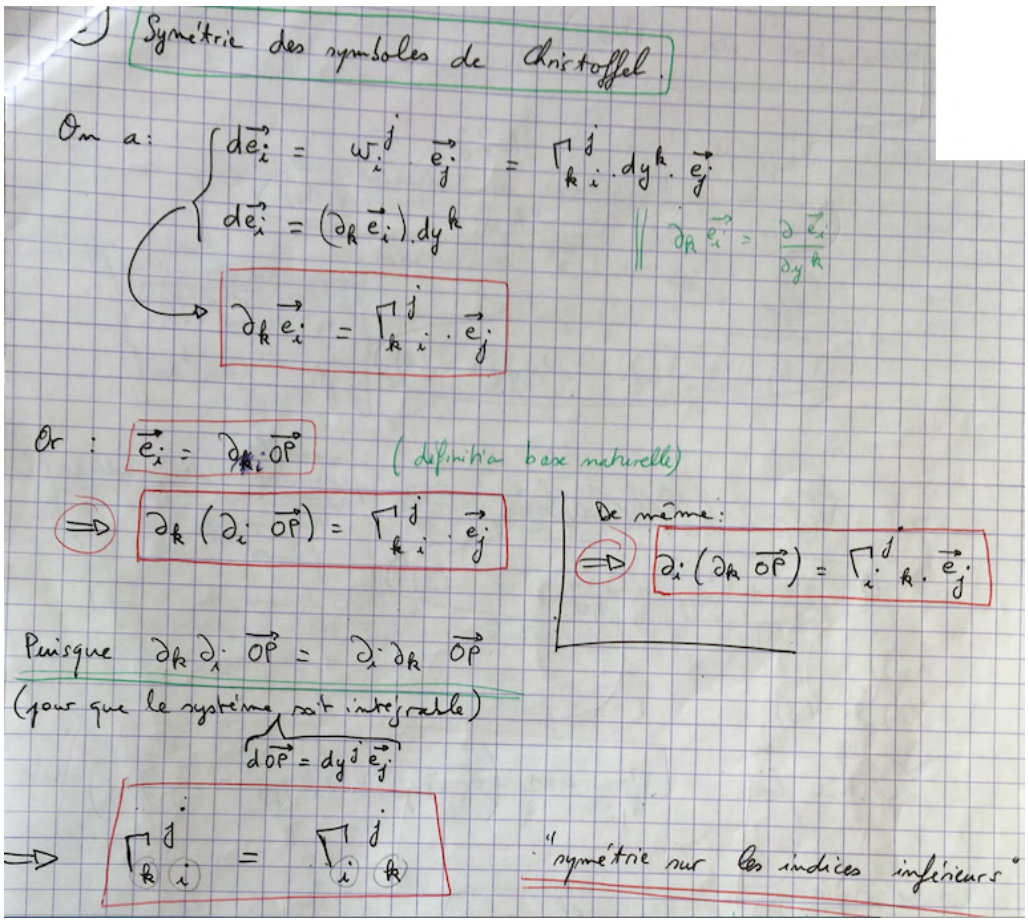
et de même :

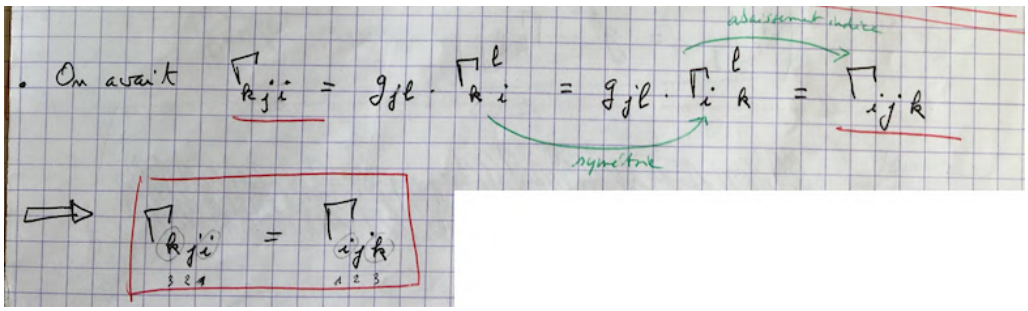
$$\Gamma_k{}^j{}_i = g^{jm} \, \Gamma_{kmi}$$

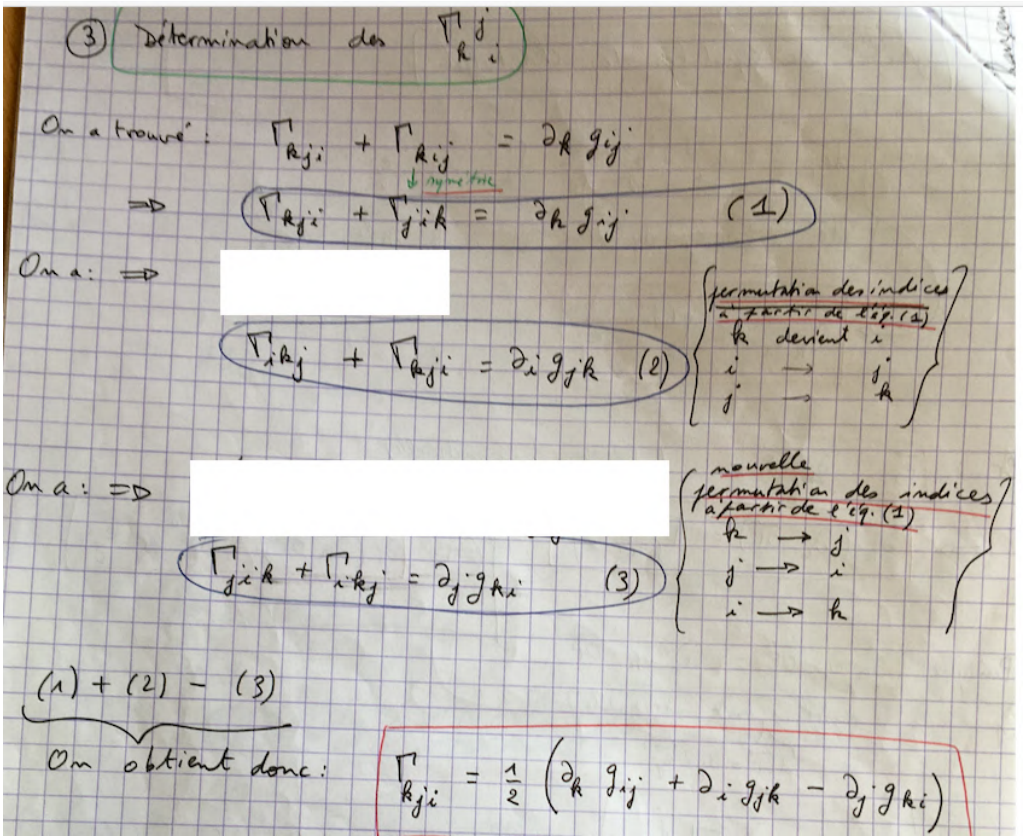
→ on doit déterminer les Γ_{kji} !!!

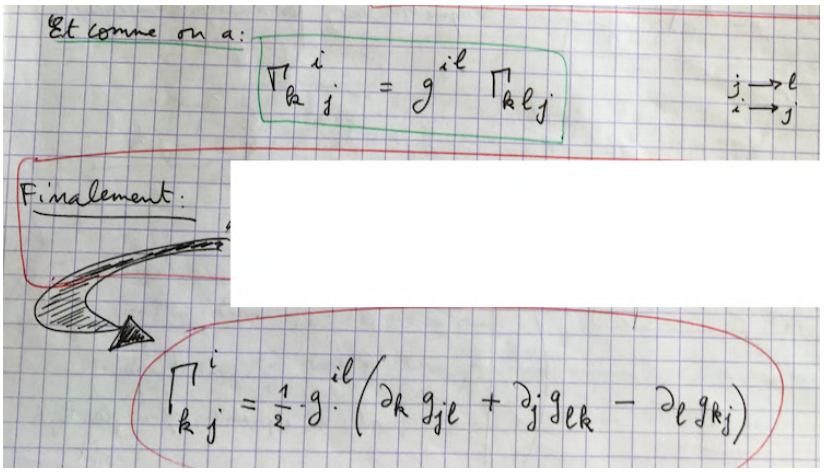

On a :
g_{ij}
$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$
$w_j^l \vec{e}_l$
On a : $\Rightarrow$ $dg_{ij} = \vec{e}_i \cdot d\vec{e}_j + \vec{e}_j \cdot d\vec{e}_i$
w_{ij}
w_{ji}

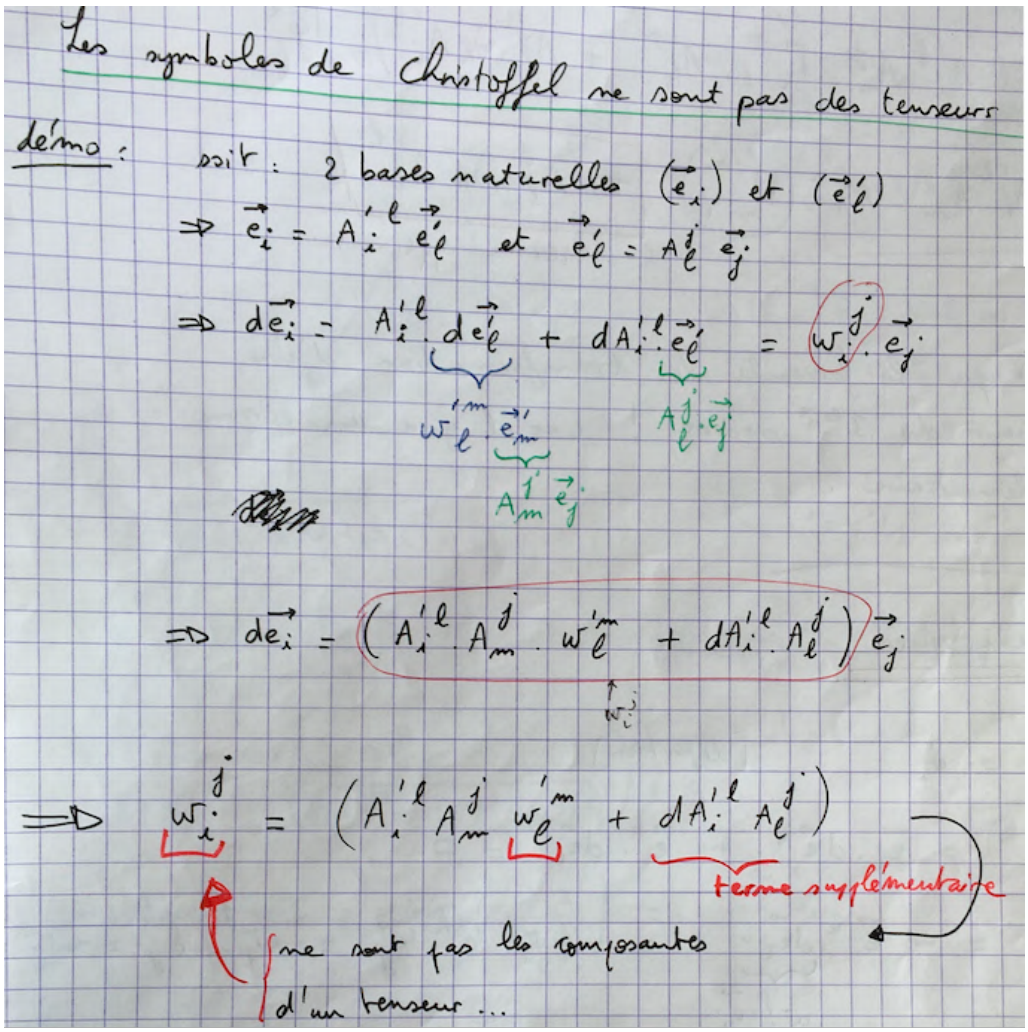

$dg_{ij} = w_{ij} + w_{ji}$
$= \left(\Gamma_{kji} + \Gamma_{kij}\right) dy^k$
Or : $dg_{ij} = \frac{\partial}{\partial y^k}(g_{ij}) \cdot dy^k = \partial_k g_{ij} \cdot dy^k$
$\Gamma_{kji} + \Gamma_{kij} = \partial_k g_{ij}$

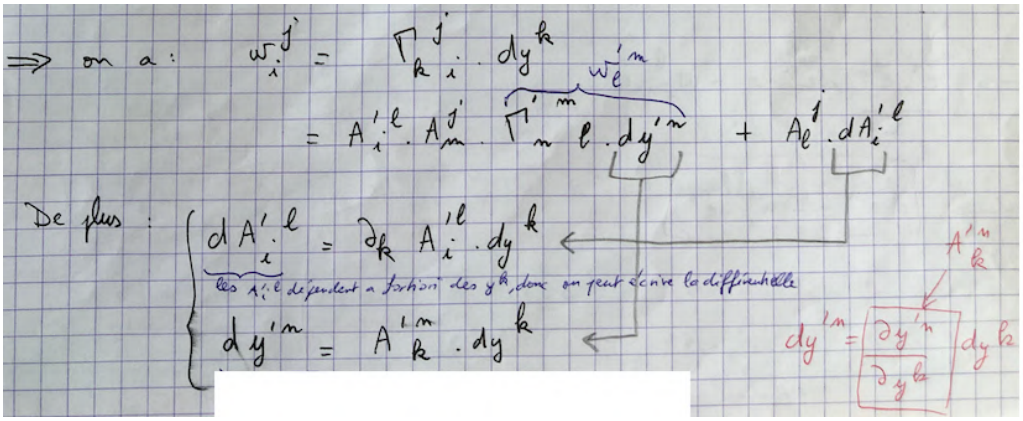

Symétrie des symboles de Christoffel.
On a :
$d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j = \Gamma_{ki}^j . dy^k . \vec{e}_j$
$d\vec{e}_i = (\partial_k \vec{e}_i) . dy^k$
$\partial_k \vec{e}_i = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial y^k}$
$\partial_k \vec{e}_i = \Gamma_{ki}^j . \vec{e}_j$
Or : $\vec{e}_i = \partial_i \overrightarrow{OP}$ (définition base naturelle)
$\Rightarrow \partial_k (\partial_i \overrightarrow{OP}) = \Gamma_{ki}^j . \vec{e}_j$
De même :
$\Rightarrow \partial_i (\partial_k \overrightarrow{OP}) = \Gamma_{ik}^j . \vec{e}_j$
Puisque $\partial_k \partial_i \overrightarrow{OP} = \partial_i \partial_k \overrightarrow{OP}$
(pour que le système soit intégrable)
$d\overrightarrow{OP} = dy^j \vec{e}_j$
$\Rightarrow \Gamma_{ki}^j = \Gamma_{ik}^j$
"symétrie sur les indices inférieurs"

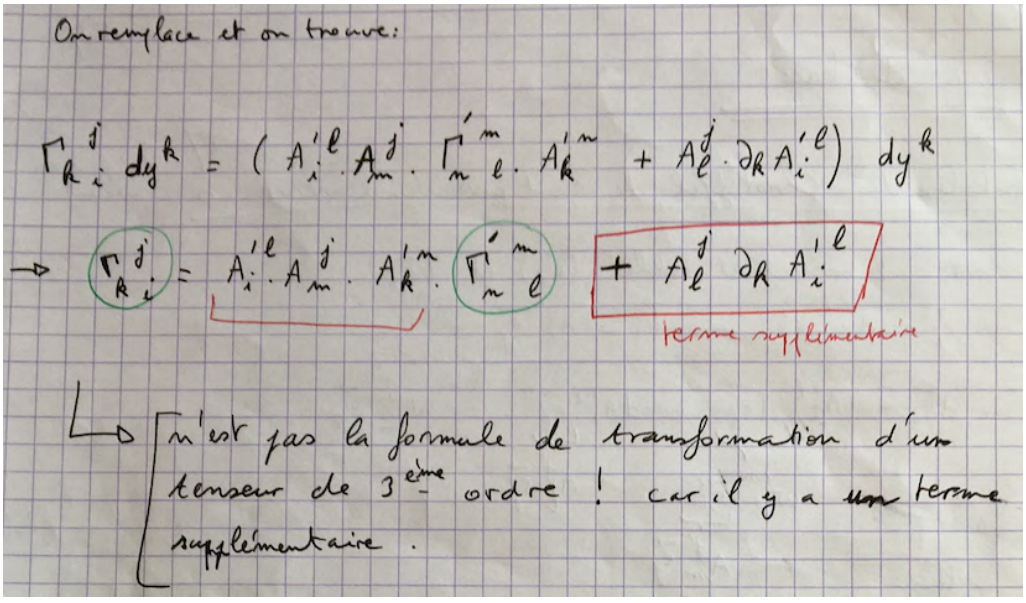

• On avait $\Gamma_{kji} = g_{jl} . \Gamma_{ki}^l = g_{jl} . \Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ijk}$
abaissement indice
symétrie
$\Rightarrow \Gamma_{kji} = \Gamma_{ijk}$
3 2 1
1 2 3


(3) Détermination des $\Gamma^{j}_{k\,i}$
On a trouvé : $\Gamma_{kji} + \Gamma_{kij} = \partial_k g_{ij}$
symétrie
$\Rightarrow$ $\Gamma_{kji} + \Gamma_{jik} = \partial_k g_{ij}$ (1)
On a : $\Rightarrow$
$\Gamma_{ikj} + \Gamma_{kji} = \partial_i g_{jk}$ (2)
permutation des indices à partir de l'éq. (1)
k devient i
i → j
j → k
On a : $\Rightarrow$
$\Gamma_{jik} + \Gamma_{ikj} = \partial_j g_{ki}$ (3)
nouvelle permutation des indices à partir de l'éq. (1)
k → j
j → i
i → k
(1) + (2) − (3)
On obtient donc : $\Gamma_{kji} = \frac{1}{2}\left(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}\right)$


Et comme on a : $\Gamma^{i}_{k\,j} = g^{il}\,\Gamma_{klj}$
j → l
i → j
Finalement :
$\Gamma^{i}_{k\,j} = \frac{1}{2} g^{il}\left(\partial_k g_{jl} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{kj}\right)$


Les symboles de Christoffel ne sont pas des tenseurs
démo : soit : 2 bases naturelles $(\vec{e}_i)$ et $(\vec{e}'_{i'})$
$\Rightarrow \vec{e}_i = A'^{i'}_{i}\,\vec{e}'_{i'}$ et $\vec{e}'_{i'} = A^{j}_{i'}\,\vec{e}_j$
$\Rightarrow d\vec{e}_i = A'^{i'}_{i}\,d\vec{e}'_{i'} + dA'^{i'}_{i}\,\vec{e}'_{i'} = \omega^{j}_{i}\,\vec{e}_j$
$\omega'^{m}_{i'}\,\vec{e}'_{m}$
$A^{j}_{i'}\,\vec{e}_j$
$A^{j}_{m}\,\vec{e}_j$
$\Rightarrow d\vec{e}_i = \left(A'^{i'}_{i}\,A^{j}_{m}\,\omega'^{m}_{i'} + dA'^{i'}_{i}\,A^{j}_{i'}\right)\vec{e}_j$
ω^{j}_{i}
$\Rightarrow \omega^{j}_{i} = \left(A'^{i'}_{i}\,A^{j}_{m}\,\omega'^{m}_{i'} + dA'^{i'}_{i}\,A^{j}_{i'}\right)$
terme supplémentaire
ne sont pas les composantes d'un tenseur ...





$\Longrightarrow$ on a : $\omega_i^{\ j} = \Gamma_{k\ i}^{\ j} \cdot dy^k$

$$= A'^{\ell}_{i} \cdot A^{j}_{m} \cdot \overbrace{\Gamma'^{m}_{n\ \ell} \cdot dy'^{n}}^{\omega'^{m}_{\ell}} + A^{j}_{\ell} \cdot dA'^{\ell}_{i}$$

De plus :

$$\begin{cases} \underbrace{dA'^{\ell}_{i}}_{\text{les } A'^{\ell}_{i} \text{ dépendent a fortiori des } y^k\text{, donc on peut écrire la différentielle}} = \partial_k A'^{\ell}_{i} \cdot dy^k \\ dy'^{n} = A'^{n}_{k} \cdot dy^k \end{cases}$$

$$dy'^{n} = \boxed{\frac{\partial y'^{n}}{\partial y^k}}\, dy^k \qquad A'^{n}_{k}$$

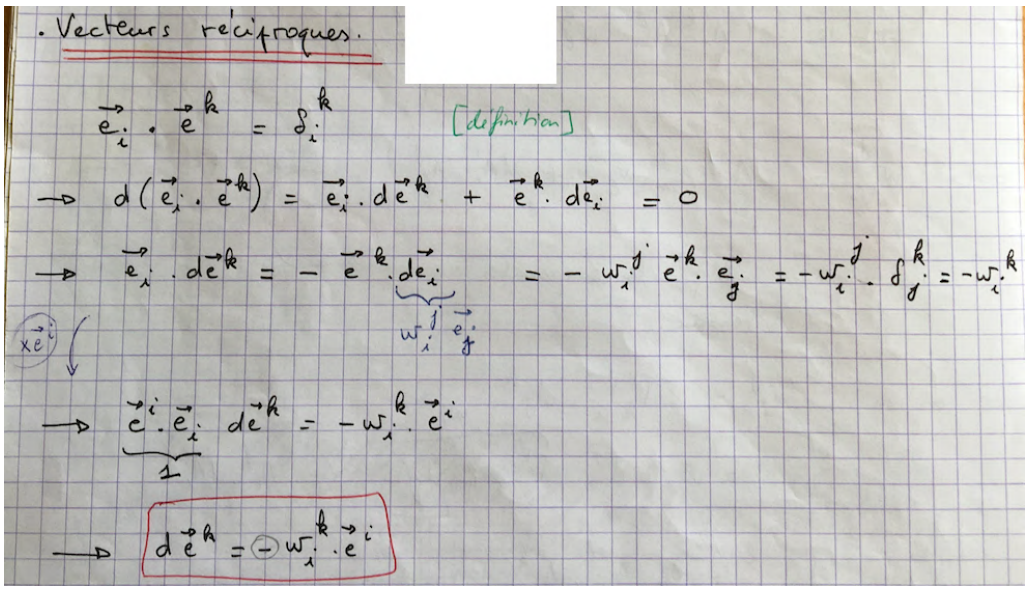
On remplace et on trouve :

$$\Gamma_{k\ i}^{\ j}\, dy^k = \left(A'^{\ell}_{i} \cdot A^{j}_{m} \cdot \Gamma'^{m}_{n\ \ell} \cdot A'^{n}_{k} + A^{j}_{\ell} \cdot \partial_k A'^{\ell}_{i} \right) dy^k$$

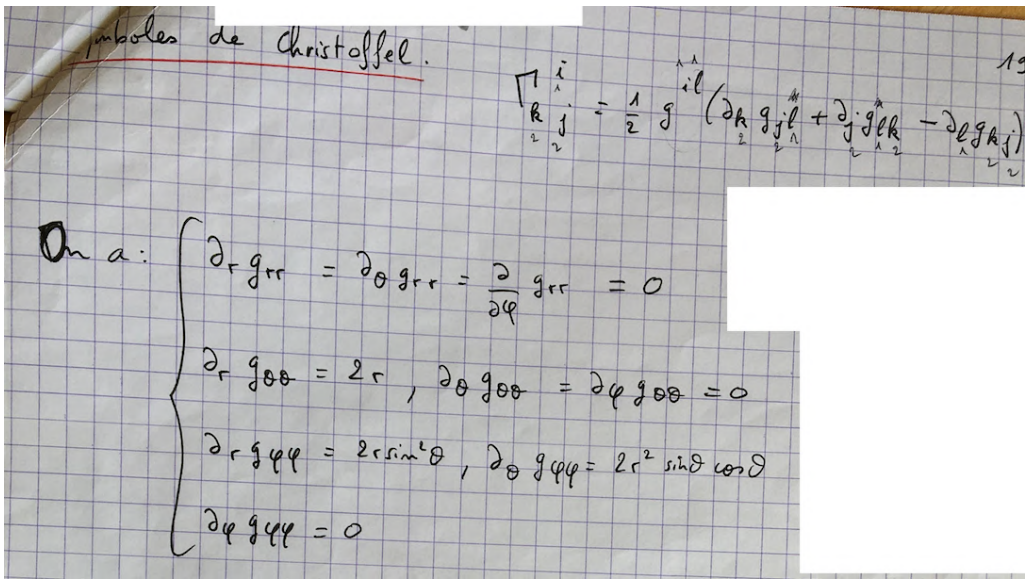
$$\rightarrow \Gamma_{k\ i}^{\ j} = \underbrace{A'^{\ell}_{i} \cdot A^{j}_{m} \cdot A'^{n}_{k}} \cdot \Gamma'^{m}_{n\ \ell} \boxed{+ A^{j}_{\ell}\, \partial_k A'^{\ell}_{i}}$$

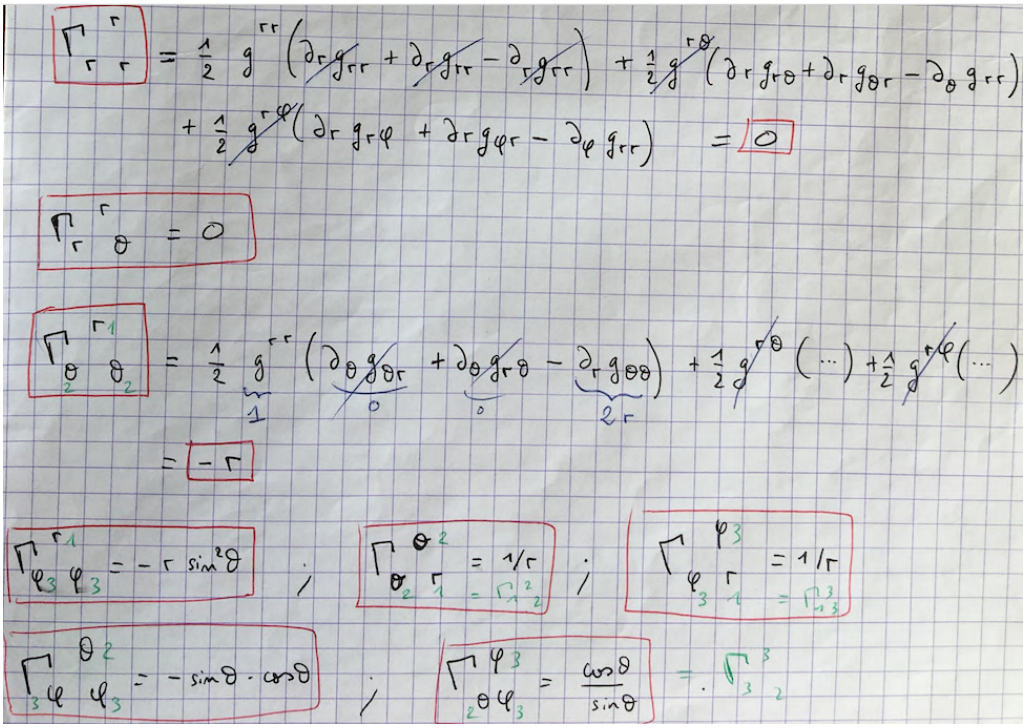
terme supplémentaire

$\hookrightarrow$ n'est pas la formule de transformation d'un tenseur de 3ème ordre ! car il y a un terme supplémentaire.



Suite de l'exemple sur les coordonnées sphériques

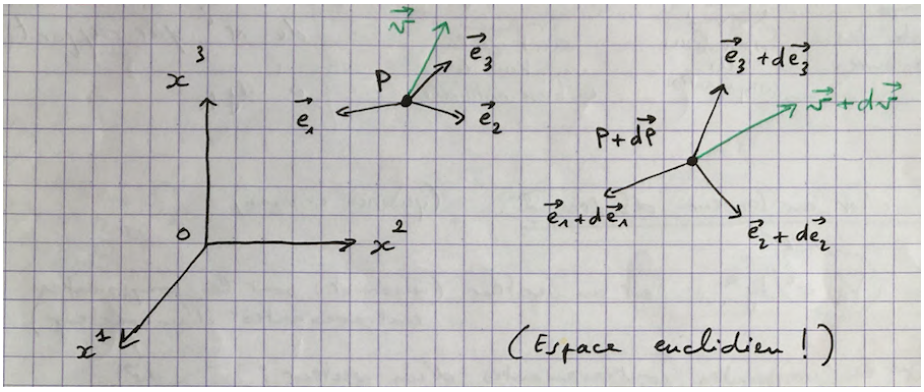



$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2} g^{rr}(\partial_r g_{rr} + \partial_r g_{rr} - \partial_r g_{rr}) + \frac{1}{2} g^{r\theta}(\partial_r g_{r\theta} + \partial_r g_{\theta r} - \partial_\theta g_{rr}) + \frac{1}{2} g^{r\varphi}(\partial_r g_{r\varphi} + \partial_r g_{\varphi r} - \partial_\varphi g_{rr}) = 0$
$\Gamma^r_{r\theta} = 0$
$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2} g^{rr}(\partial_\theta g_{\theta r} + \partial_\theta g_{r\theta} - \partial_r g_{\theta\theta}) + \frac{1}{2} g^{r\theta}(\dots) + \frac{1}{2} g^{r\varphi}(\dots)$
$= -r$
$\Gamma^r_{\varphi_3\varphi_3} = -r\sin^2\theta$; $\Gamma^\theta_{\theta r} = 1/r$; $\Gamma^{\varphi_3}_{\varphi_3 r} = 1/r$
$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cdot\cos\theta$; $\Gamma^{\varphi_3}_{\theta\varphi_3} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Chapter 5

Dérivée covariante, accélération d'une particule, opérateurs différentiels

Différentielle absolue d'un vecteur.



$\vec{v} = v^i . \vec{e}_i$, où $(\vec{e}_i)$ est la base naturelle en P .

$$d\vec{v} = dv^i . \vec{e}_i + v^i . d\vec{e}_i$$
$$= dv^i . \vec{e}_i + v^i . \Gamma^j_{ki} . dy^k . \vec{e}_j$$
$$= dv^i . \vec{e}_i + v^j . \Gamma^i_{kj} . dy^k . \vec{e}_i$$
$$= \left(dv^i + v^j . \Gamma^i_{kj} . dy^k \right) . \vec{e}_i$$

en échangeant les noms des indices i et j

Dv^i

$$d\vec{v} = Dv^i . \vec{e}_i$$

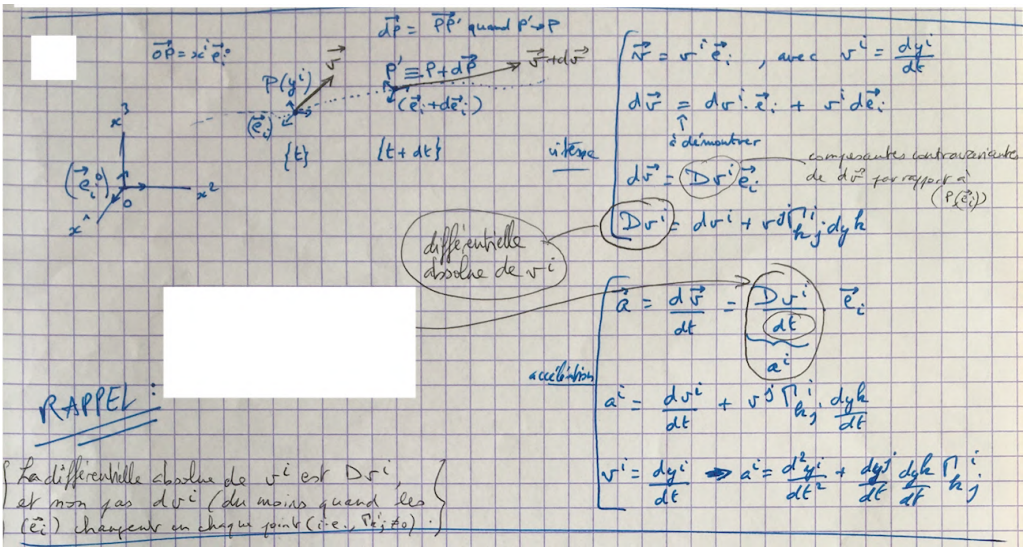
sur la base des $\vec{e}_i$

Dv^i = "différentielle absolue de v^i"

= composante contravariante de $d\vec{v}$

(abus de langage : on dit que $d\vec{v}$ est la différentielle absolue de $\vec{v}$)

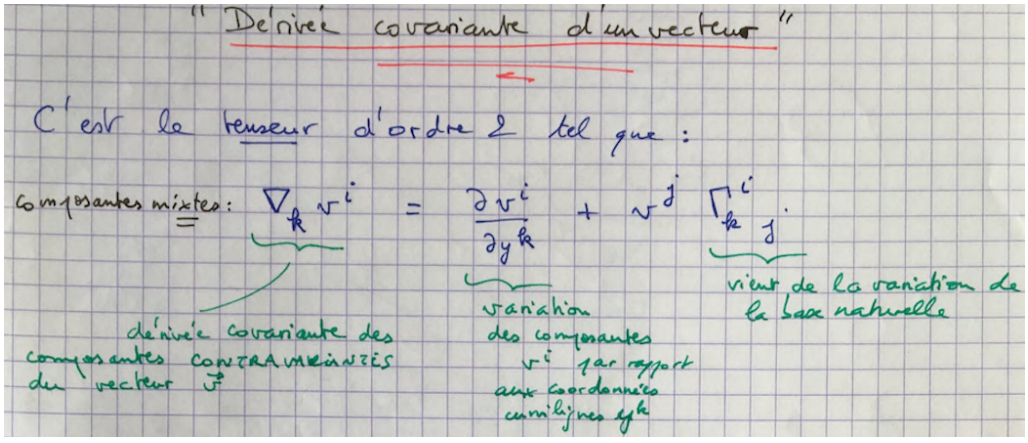
Vecteurs vitesse et accélération d'une particule.



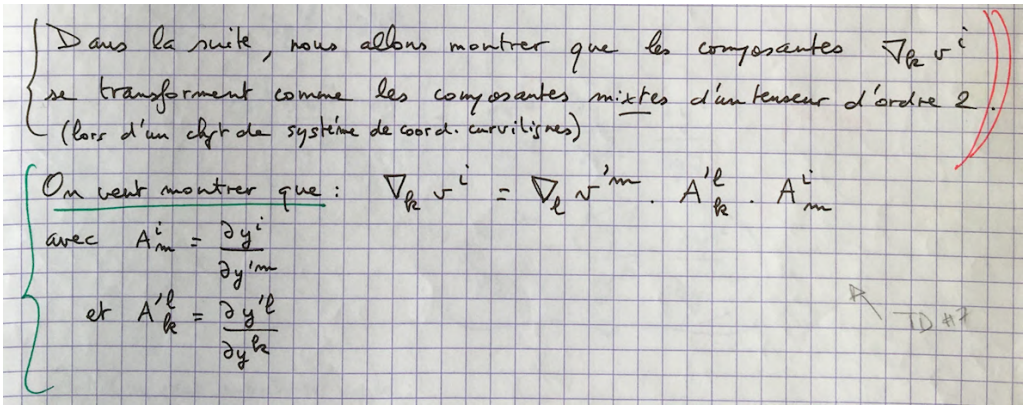
Remarque:

Si $a^k = 0$, la courbe parcourue par un mobile est une droite et l'on retrouve alors l'équation des géodésiques.

Dérivée covariante d'un vecteur v = tenseur d'ordre 2; ses composantes mixtes sont :



La 'tensorialité' de la dérivée covariante (d'un vecteur) fera l'objet du TD7.



Remarque.

Soit s l'abscisse curviligne d'une 'fourmi' (infiniment plate) se déplaçant à vitesse constante le long d'une courbe $\mathcal{C} = \mathcal{C}(y^i)$ sur la sphère unitaire $S_2 = S_2(\theta, \varphi)$ (pour fixer les choses avec un espace topologique usuel; les y^i sont les coordonnées curvilignes de la fourmi, c'est-à-dire ici : $y^1 = \theta, y^2 = \varphi$). s représente donc la distance parcourue par la fourmi en fonction du temps t, à partir d'un point origine. Prenons comme paramètre de la courbe $\mathcal{C}$ l'abscisse curviligne s, on a : $y^i = y^i(s)$. Les équations des géodésiques (plus courts chemins) s'écrivent donc :

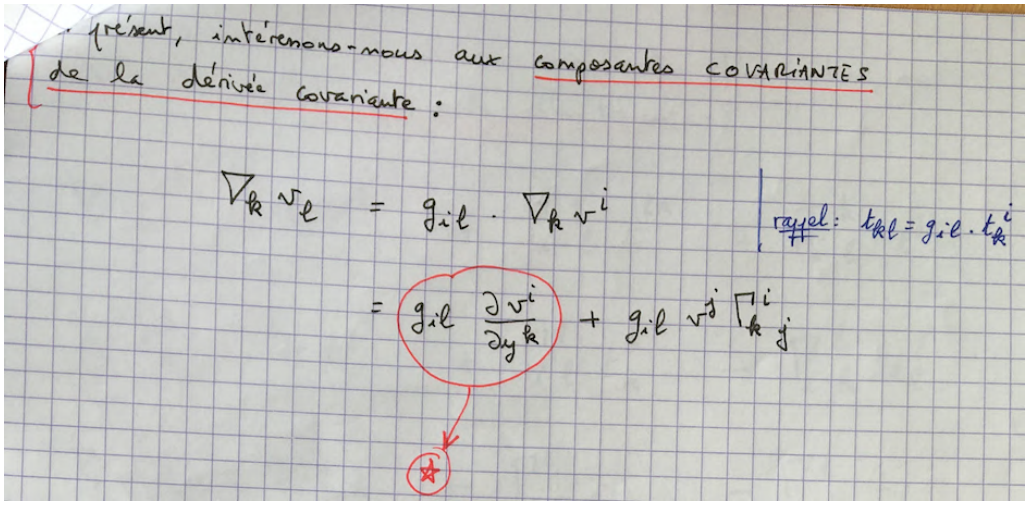
$$\frac{d^2 y^l}{ds^2} + \Gamma_{j\,k}^{\ l} \frac{dy^j}{ds} \frac{dy^k}{ds} = 0\,.$$

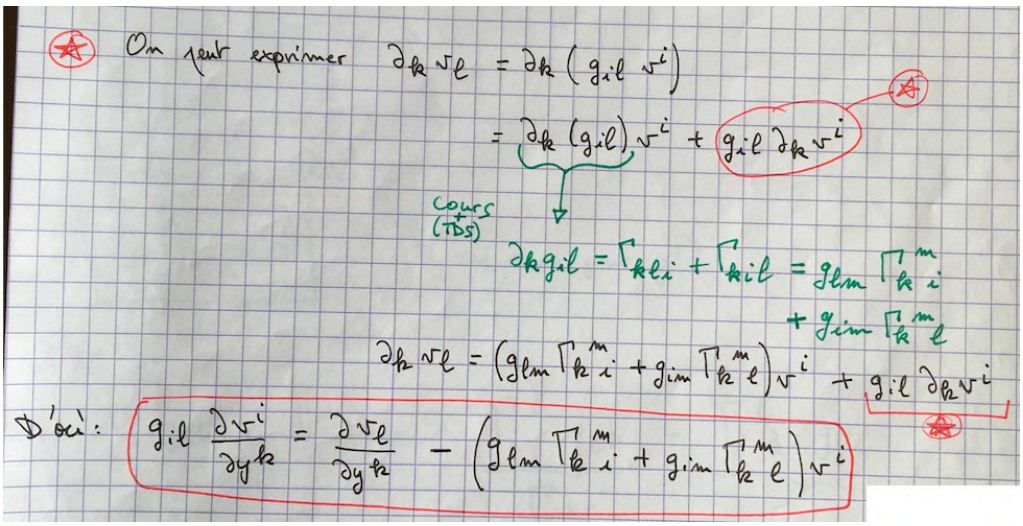
Considérons à présent le vecteur unité $\mathbf{u}$ tangent à la courbe $\mathcal{C} = \mathcal{C}(s)$, et de composantes contravariantes $u^i = \frac{dy^i}{ds}$. Par suite de son interprétation cinématique, le vecteur $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$ est appelé le vecteur vitesse unitaire (avec $(\mathbf{e}_i)$ la base naturelle). **On montrera au TD8** que les équations géodésiques s'écrivent sous la forme générale suivante:

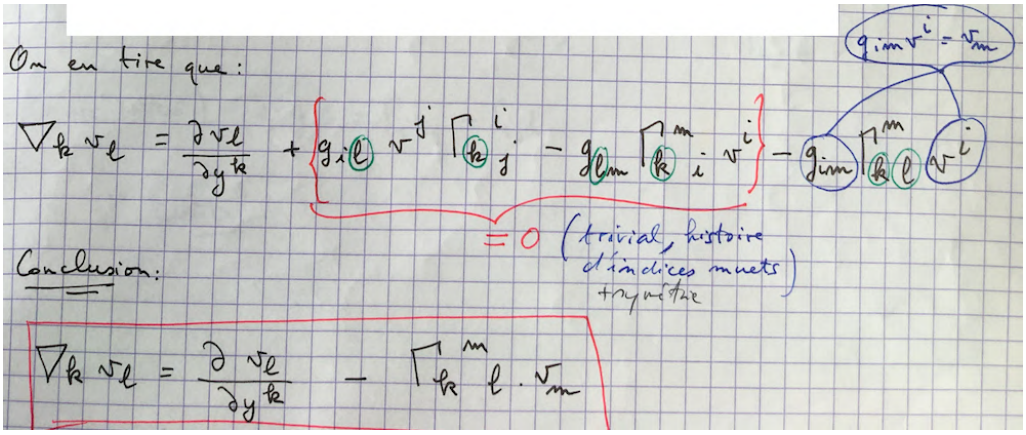
$$u^k \nabla_k u^i = 0\,,$$

formule qui fait donc apparaître la dérivée covariante d'un vecteur : $\nabla_k u^i = \partial_k u^i + u^j \Gamma_{k\,j}^{\ i}$.

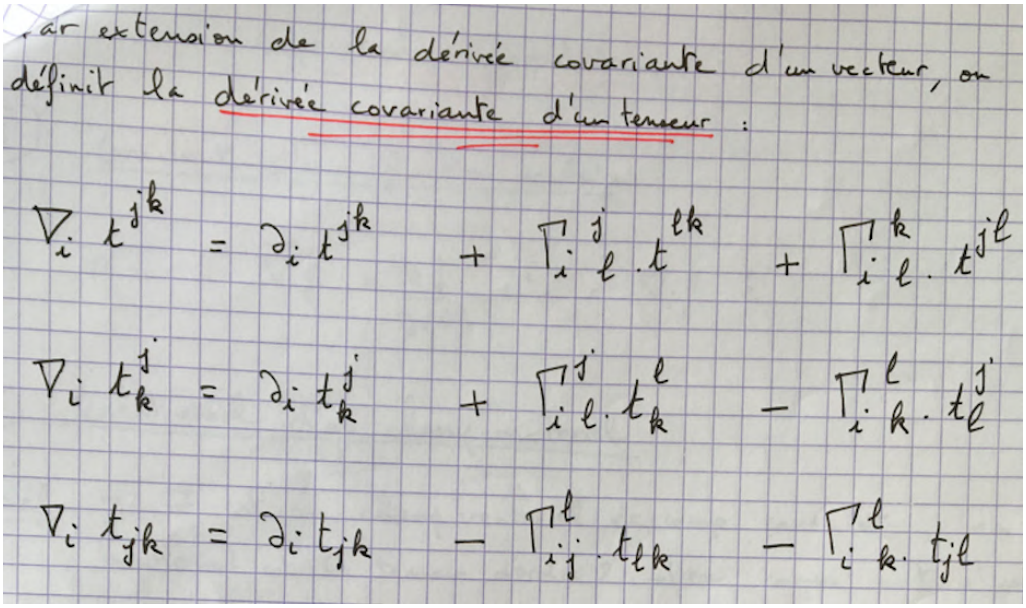
Les composantes (2x) covariantes du tenseur 'dérivée covariante' (d'un vecteur v) sont :



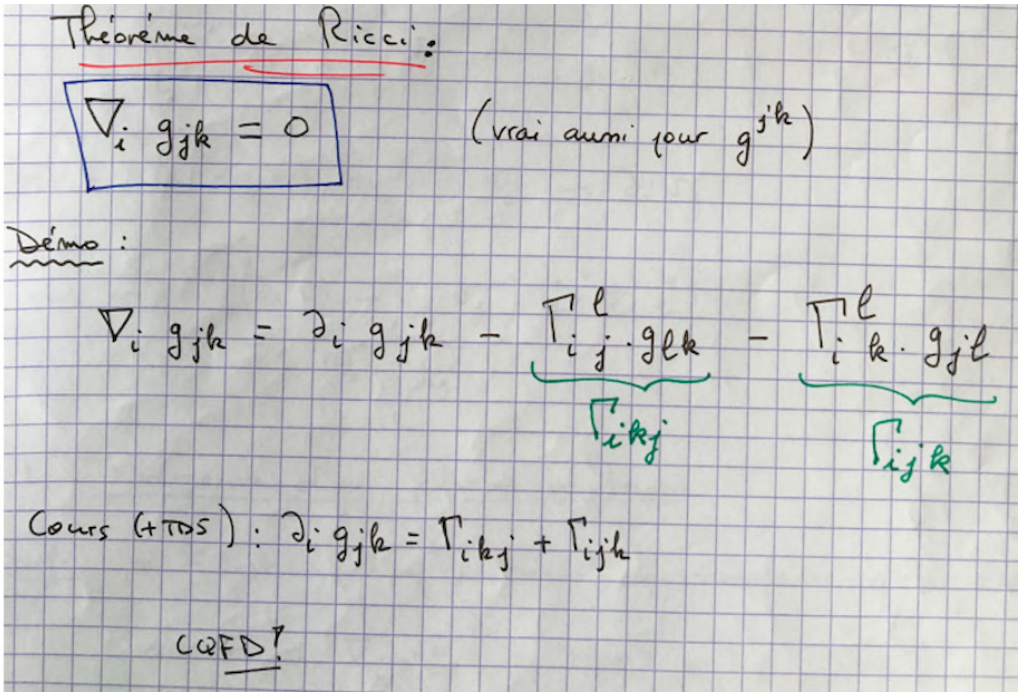




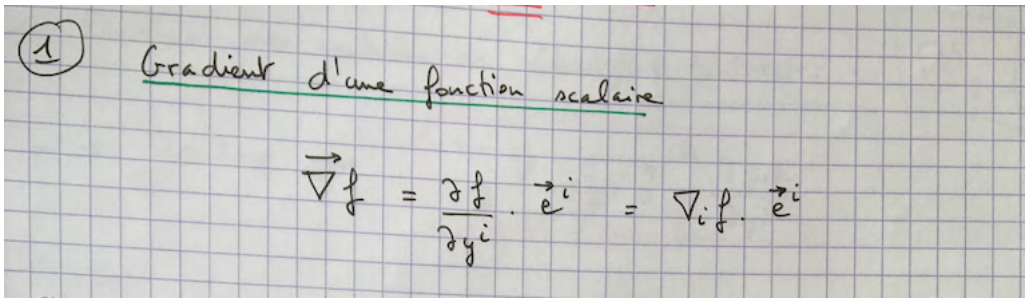
Dérivée covariante d'un tenseur t (ici t est d'ordre 2).

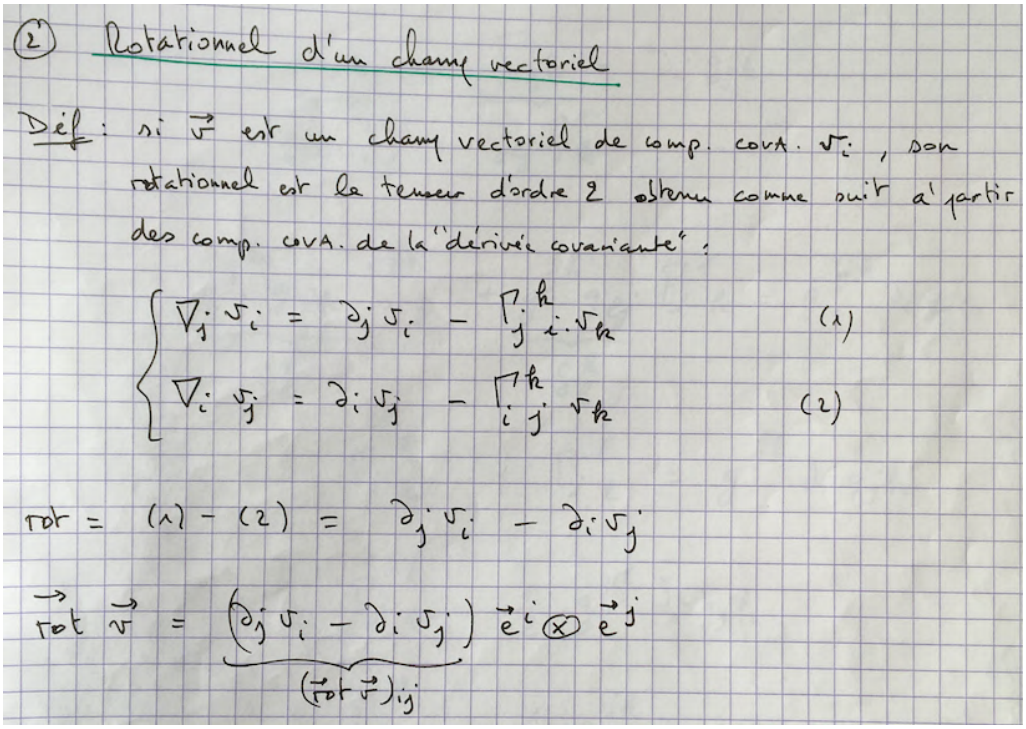


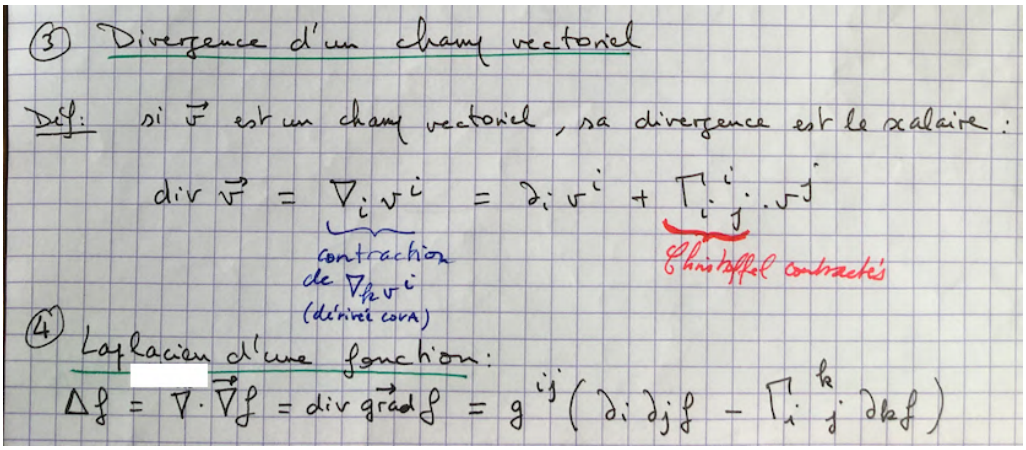
Théorème de Ricci.

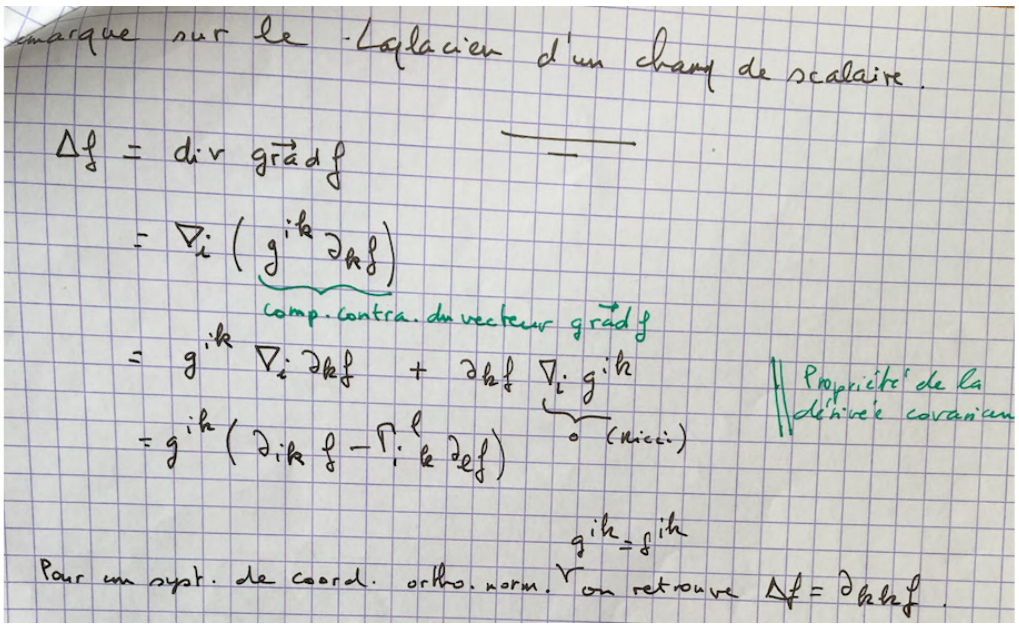


Opérateurs différentiels.




(2) Rotationnel d'un champ vectoriel
Déf : si $\vec{v}$ est un champ vectoriel de comp. covA. v_i, son rotationnel est le tenseur d'ordre 2 obtenu comme suit à partir des comp. covA. de la "dérivée covariante" :
$\nabla_j v_i = \partial_j v_i - \Gamma^k_{ji} v_k$ (1)
$\nabla_i v_j = \partial_i v_j - \Gamma^k_{ij} v_k$ (2)
rot = (1) − (2) = $\partial_j v_i - \partial_i v_j$
$\vec{\text{rot}}\,\vec{v} = (\partial_j v_i - \partial_i v_j)\, \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j$
$(\vec{\text{rot}}\,\vec{v})_{ij}$

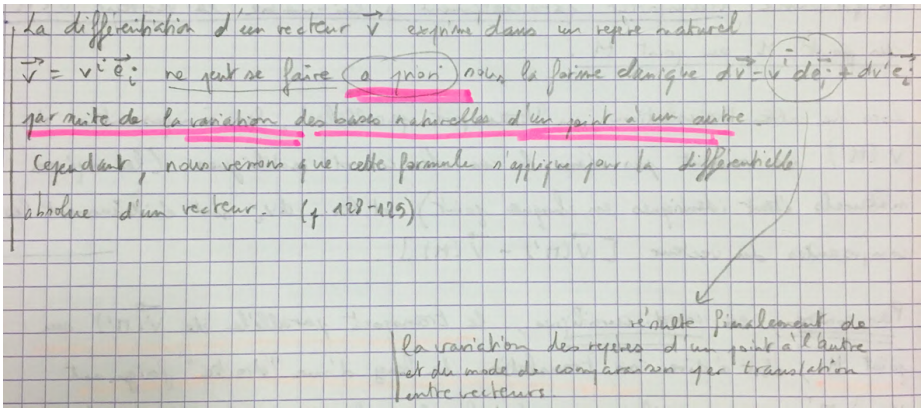

(3) Divergence d'un champ vectoriel
Déf : si $\vec{v}$ est un champ vectoriel, sa divergence est le scalaire :
$\text{div}\,\vec{v} = \nabla_i v^i = \partial_i v^i + \Gamma^i_{ij} v^j$
contraction de $\nabla_k v^i$ (dérivée covA)
Christoffel contractés
(4) Laplacien d'une fonction :
$\Delta f = \nabla \cdot \vec{\nabla} f = \text{div}\,\vec{\text{grad}}\, f = g^{ij}(\partial_i \partial_j f - \Gamma^k_{ij} \partial_k f)$

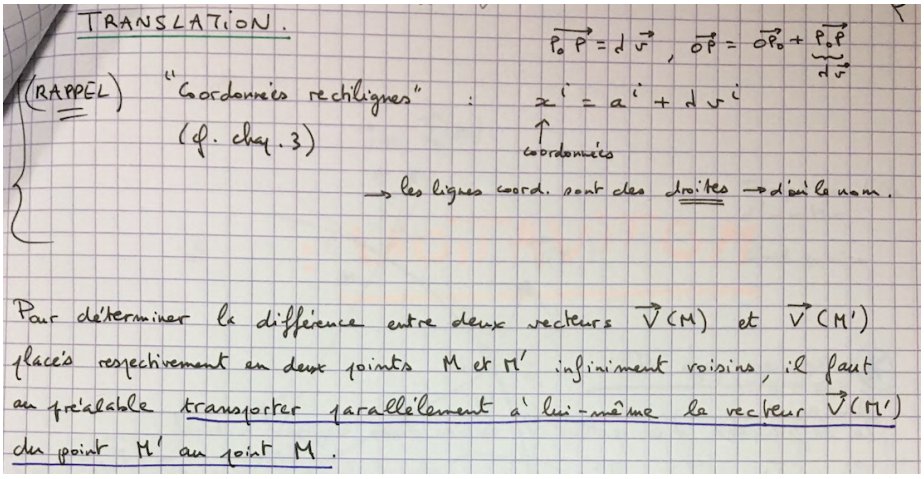

Remarque sur le Laplacien d'un champ de scalaire.
$\Delta f = \mathrm{div}\ \vec{\mathrm{grad}}\, f$
$= \nabla_i \left(g^{ik} \partial_k f \right)$
comp. contra. du vecteur $\vec{\mathrm{grad}}\, f$
$= g^{ik} \nabla_i \partial_k f + \partial_k f \underbrace{\nabla_i g^{ik}}_{0 \text{ (Ricci)}}$
Propriété de la dérivée covariante
$= g^{ik} \left(\partial_{ik} f - \Gamma^{\ell}_{ik} \partial_\ell f \right)$
Pour un syst. de coord. ortho. norm. on retrouve $\Delta f = \partial_{kk} f$.
$g^{ik} = \delta^{ik}$

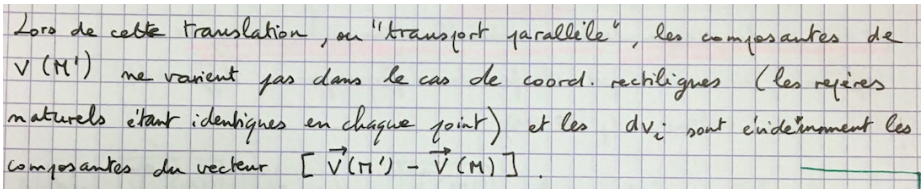
Chapter 6

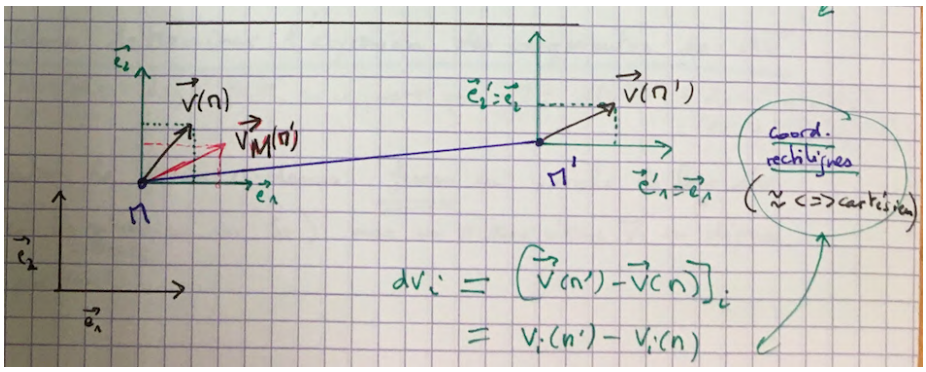
Transport parallèle

Autour du transport parallèle d'un vecteur.
Motivation:

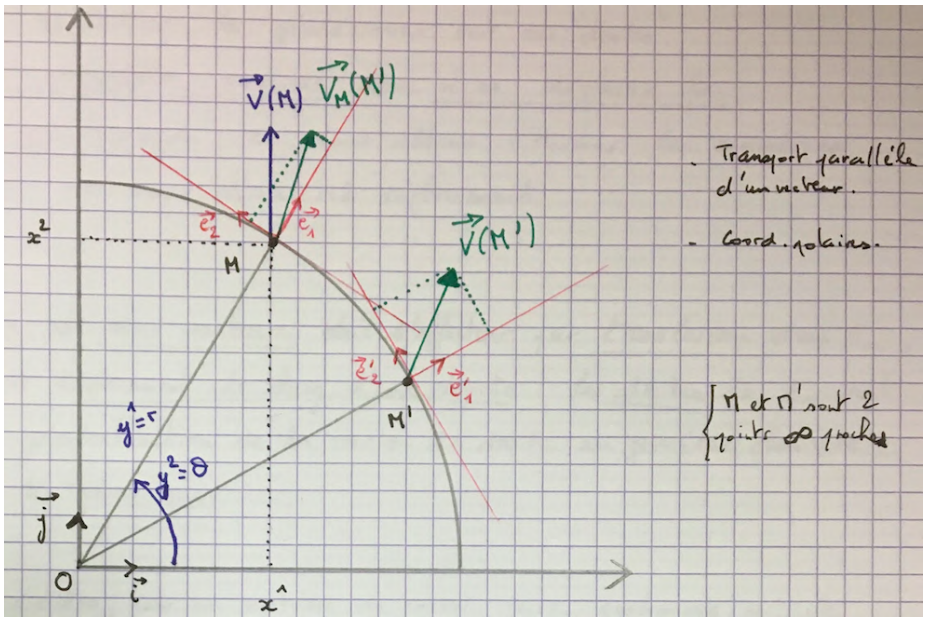


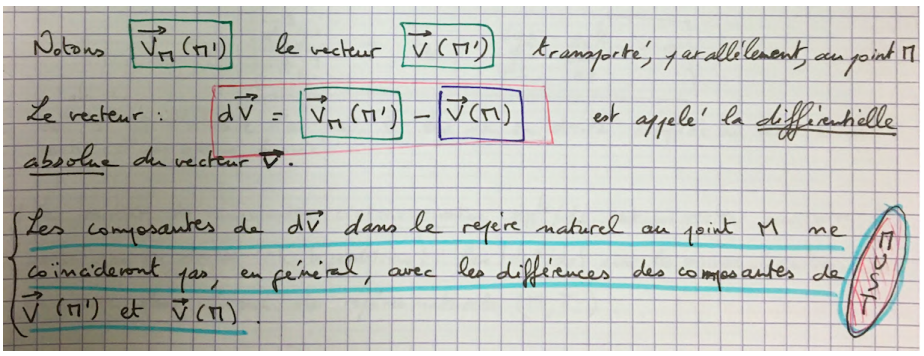


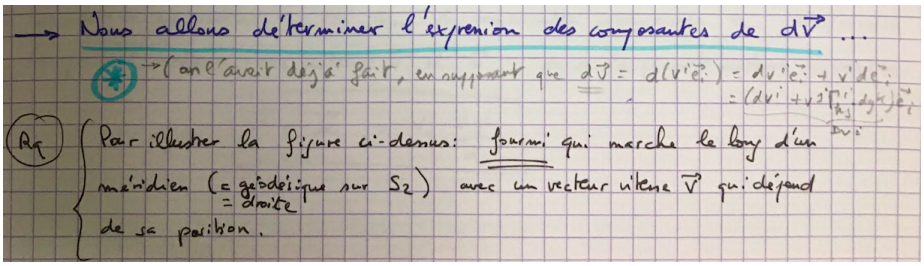




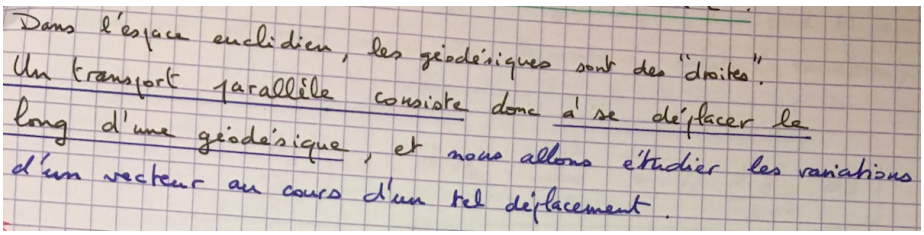
Par contre, en coord. curvilignes, le transport parallèle de $\vec{V}(n')$ au point M, c'est à dire sa translation le long d'une "droite" joignant M à n' va modifier en général la valeur de ses composantes dans le repère naturel. { Voir exemple pour un champ de vecteurs en coord. polaires → cf. Figure.

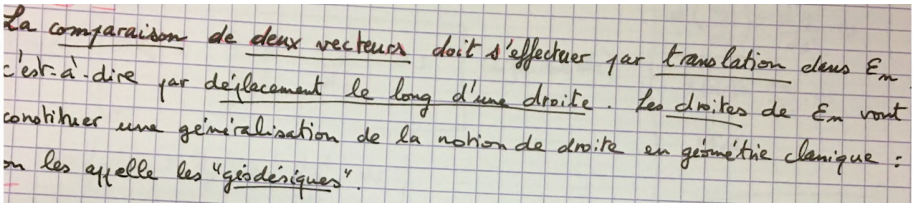


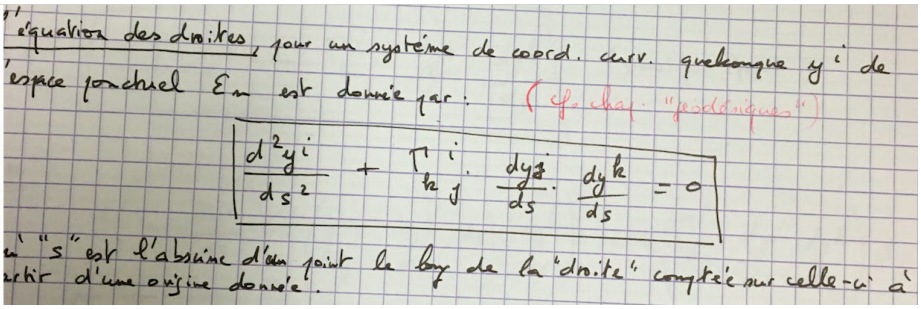


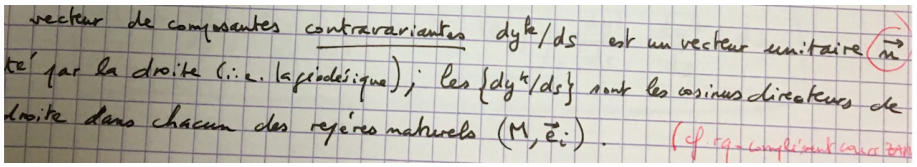


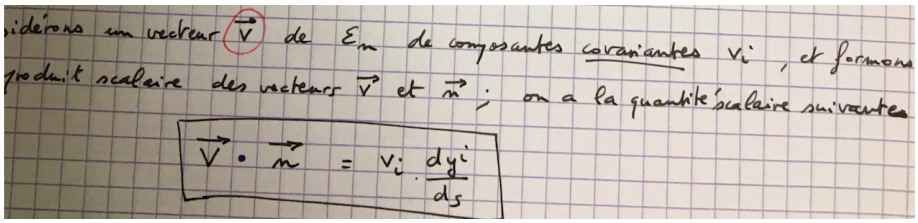
Variation le long d'une géodésique.






l'équation des droites, pour un système de coord. curv. quelconque y^i de
l'espace ponctuel $\mathcal{E}_n$ est donnée par : (cf. chap "géodésiques")
$$\frac{d^2 y^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kj} \cdot \frac{dy^j}{ds} \cdot \frac{dy^k}{ds} = 0$$
où "s" est l'abscisse d'un point le long de la "droite" comptée sur celle-ci à
partir d'une origine donnée.


vecteur de composantes contravariantes dy^k/ds est un vecteur unitaire $\vec{n}$
tè par la droite (i.e. la géodésique) ; les $\{dy^k/ds\}$ sont les cosinus directeurs de
droite dans chacun des repères naturels $(M, \vec{e}_i)$. (cf rq : complément cours TAN


sidérons un vecteur $\vec{v}$ de $\mathcal{E}_n$ de composantes covariantes v_i, et formons
produit scalaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{n}$; on a la quantité scalaire suivante
$$\vec{v} \cdot \vec{n} = v_i \cdot \frac{dy^i}{ds}$$

Lors d'un déplacement le long de la géodésique, d'un point M à un point infiniment voisin M', le scalaire subit la variation :

différentiation ordinaire d'un produit car concerne une grandeur scalaire

$$d\left(v_i \cdot \frac{dy^i}{ds}\right) = dv_k \cdot \frac{dy^k}{ds} + v_i \cdot \frac{d^2y^i}{ds^2} \cdot ds$$

$\vec{v} \cdot \vec{m}$ — SCALAIRE

$$d\left(\frac{dy^i}{ds}\right) = \frac{d^2y^i}{ds^2} \cdot ds$$

$$d(\alpha_i) = \frac{d\alpha_i}{ds} \cdot ds \quad \downarrow \; dy^i/ds$$

On a : $$dv_k = \frac{\partial v_k}{\partial y^j} \cdot \frac{dy^j}{ds} \cdot ds$$ (différentielle)

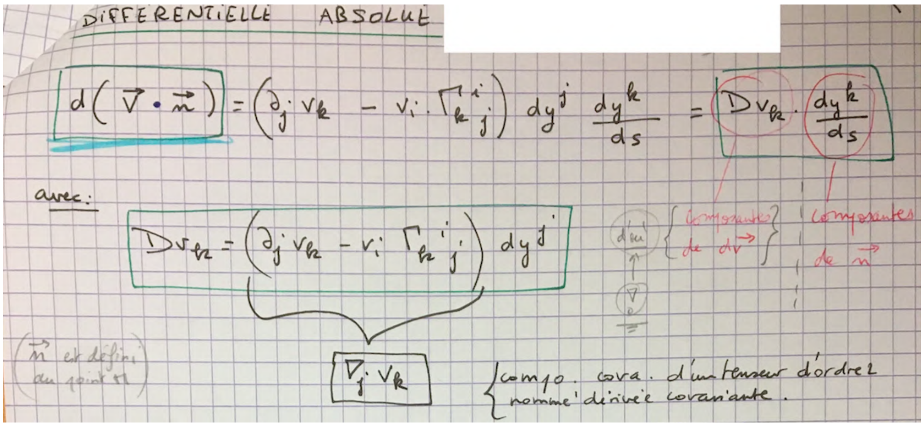
$$\hookrightarrow \left\{ dv_k = \partial_j v_k \cdot \frac{dy^j}{ds} \cdot ds \right\}$$

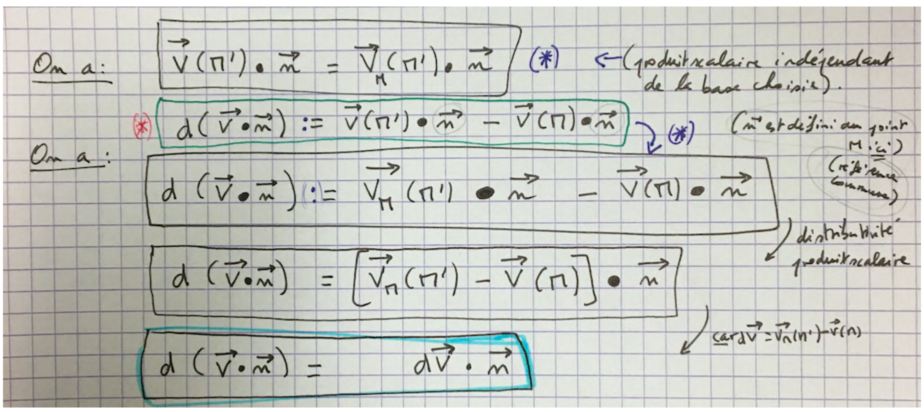
On a : $$\frac{d^2y^i}{ds^2} = -\Gamma^i_{kj} \cdot \frac{dy^j}{ds} \cdot \frac{dy^k}{ds}$$ (géodésique équation)

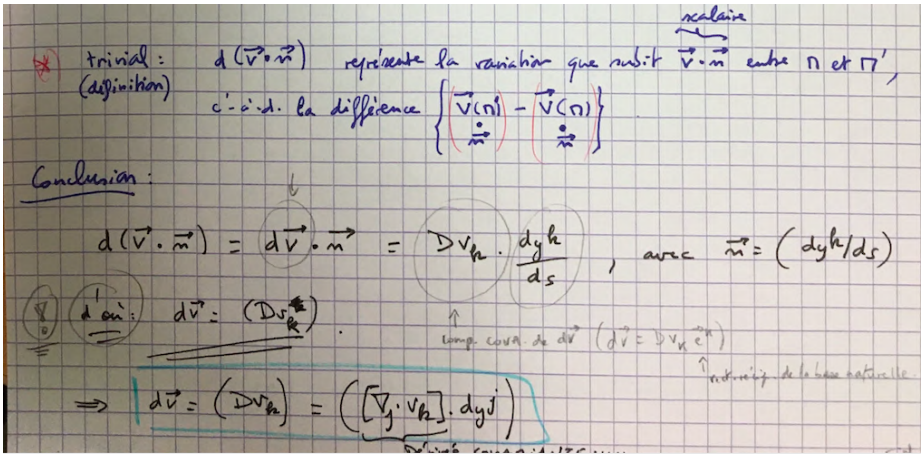
D'où :

$$d\left(v_i \cdot \frac{dy^i}{ds}\right) = \left(\frac{\partial v_k}{\partial y^j} \cdot \frac{dy^j}{ds} \cdot ds\right)\left(\frac{dy^k}{ds}\right) - v_i\left(\Gamma^i_{kj} \cdot \frac{dy^j}{ds} \cdot \frac{dy^k}{ds}\right) ds$$

$$d\left(v_i \cdot \frac{dy^i}{ds}\right) = \left(\frac{\partial v_k}{\partial y^j} - v_i \Gamma^i_{kj}\right) \frac{dy^j}{ds} \cdot \frac{dy^k}{ds} \cdot ds$$


DIFFERENTIELLE ABSOLUE
$d(\vec{V}\bullet\vec{n}) = (\partial_j v_k - v_i \cdot \Gamma^i_{k\,j})\, dy^j \,\frac{dy^k}{ds} = Dv_k \cdot \frac{dy^k}{ds}$
avec :
$Dv_k = (\partial_j v_k - v_i\, \Gamma^i_{k\,j})\, dy^j$
$\nabla_j v_k$
compo. cova. d'un tenseur d'ordre 2 nommé dérivée covariante.
composantes de $d\vec{v}$
composantes de $\vec{n}$
$\vec{n}$ est défini au point M

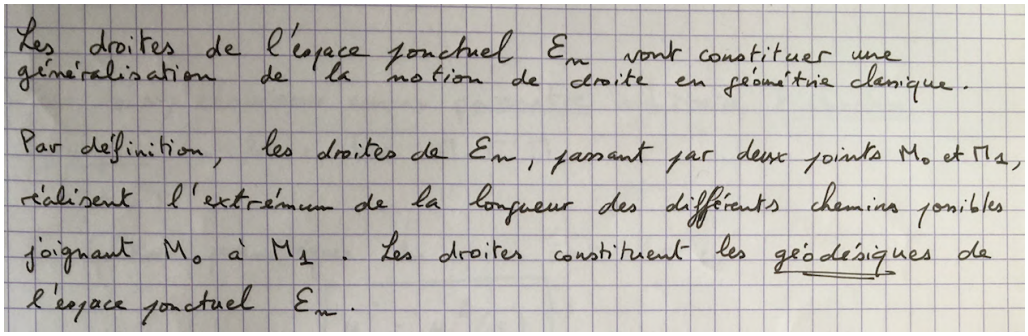

On a : $\vec{V}(M')\bullet\vec{n} = \vec{V}_M(M')\bullet\vec{n}$ (*) ← (produit scalaire indépendant de la base choisie).
On a : (*) $d(\vec{V}\bullet\vec{n}) := \vec{V}(M')\bullet\vec{n} - \vec{V}(M)\bullet\vec{n}$
($\vec{n}$ est défini au point M !) (référence commune)
$d(\vec{V}\bullet\vec{n}) := \vec{V}_M(M')\bullet\vec{n} - \vec{V}(M)\bullet\vec{n}$
distributivité produit scalaire
$d(\vec{V}\bullet\vec{n}) = [\vec{V}_M(M') - \vec{V}(M)]\bullet\vec{n}$
car $d\vec{V} = \vec{V}_M(M') - \vec{V}(M)$
$d(\vec{V}\bullet\vec{n}) = d\vec{V}\bullet\vec{n}$


scalaire
trivial : (définition)
$d(\vec{v}\cdot\vec{n})$ représente la variation que subit $\vec{v}\cdot\vec{n}$ entre Π et Π',
c-à-d. la différence $\left\{\vec{v}(\Pi')\cdot\vec{n} - \vec{v}(\Pi)\cdot\vec{n}\right\}$
Conclusion :
$d(\vec{v}\cdot\vec{n}) = d\vec{v}\cdot\vec{n} = Dv_k \cdot \frac{dy^k}{ds}$, avec $\vec{n} = (dy^k/ds)$
d'où : $d\vec{v} = (Dv_k)$
comp. covar. de $d\vec{v}$ $(d\vec{v} = Dv_k \vec{e}^k)$
$\Rightarrow$ $d\vec{v} = (Dv_k) = \left([\nabla_j \cdot v_k]\cdot dy^j\right)$

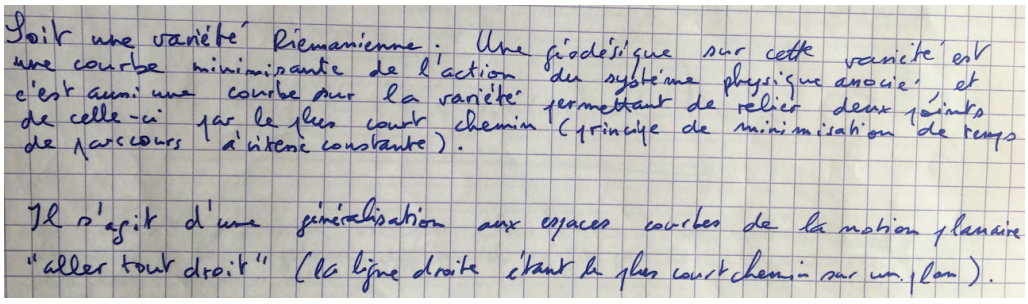
Chapter 7

Géodésiques

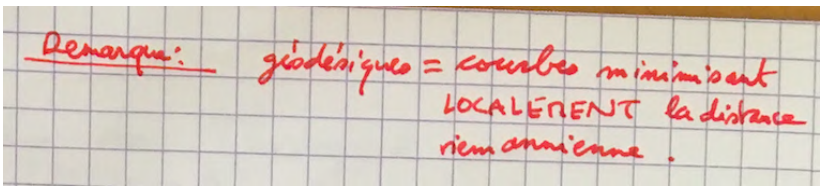
Définition.


Les droites de l'espace ponctuel E_n vont constituer une généralisation de la notion de droite en géométrie classique.

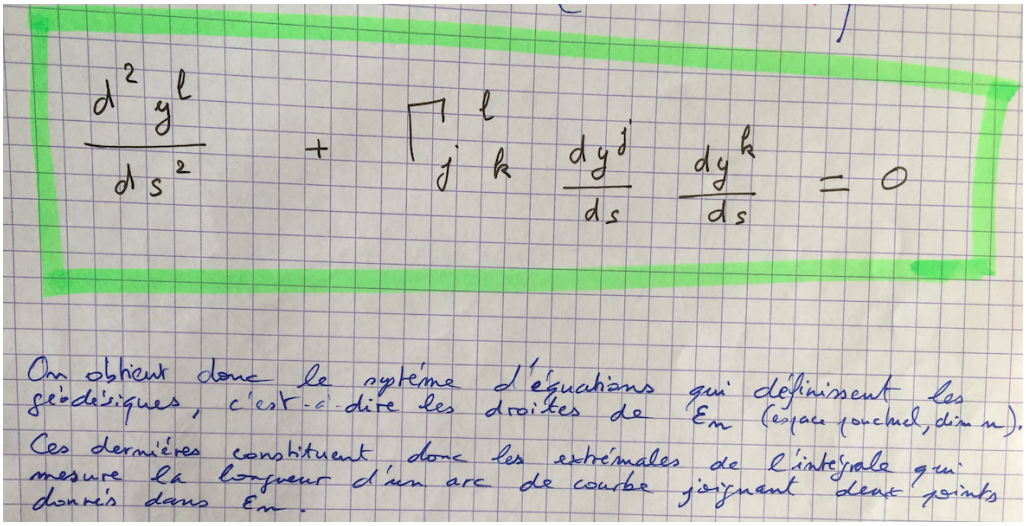
Par définition, les droites de E_n, passant par deux points M_0 et M_1, réalisent l'extrémum de la longueur des différents chemins possibles joignant M_0 à M_1. Les droites constituent les géodésiques de l'espace ponctuel E_n.


Soit une variété Riemannienne. Une géodésique sur cette variété est une courbe minimisante de l'action du système physique associé, et c'est aussi une courbe sur la variété permettant de relier deux points de celle-ci par le plus court chemin (principe de minimisation de temps de parcours à vitesse constante).

Il s'agit d'une généralisation aux espaces courbes de la notion planaire "aller tout droit" (la ligne droite étant le plus court chemin sur un plan).

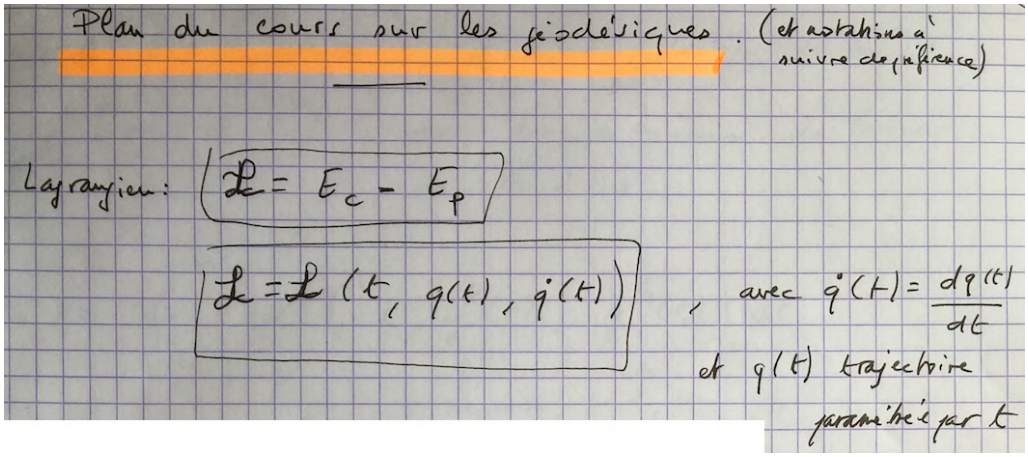


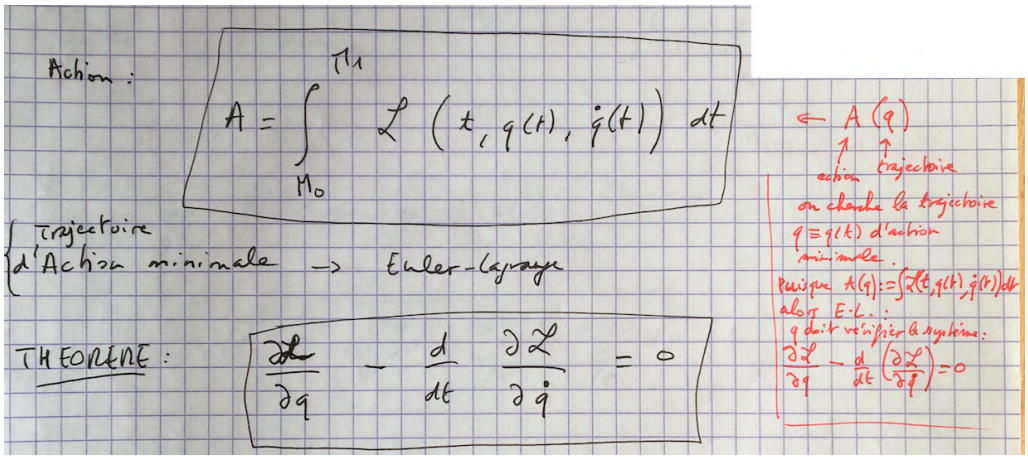
Remarque. Ci-dessous on trouvera un support partiel de la démonstration faite en cours magistral, qui vise à démontrer le système d'équations des géodésiques suivant:



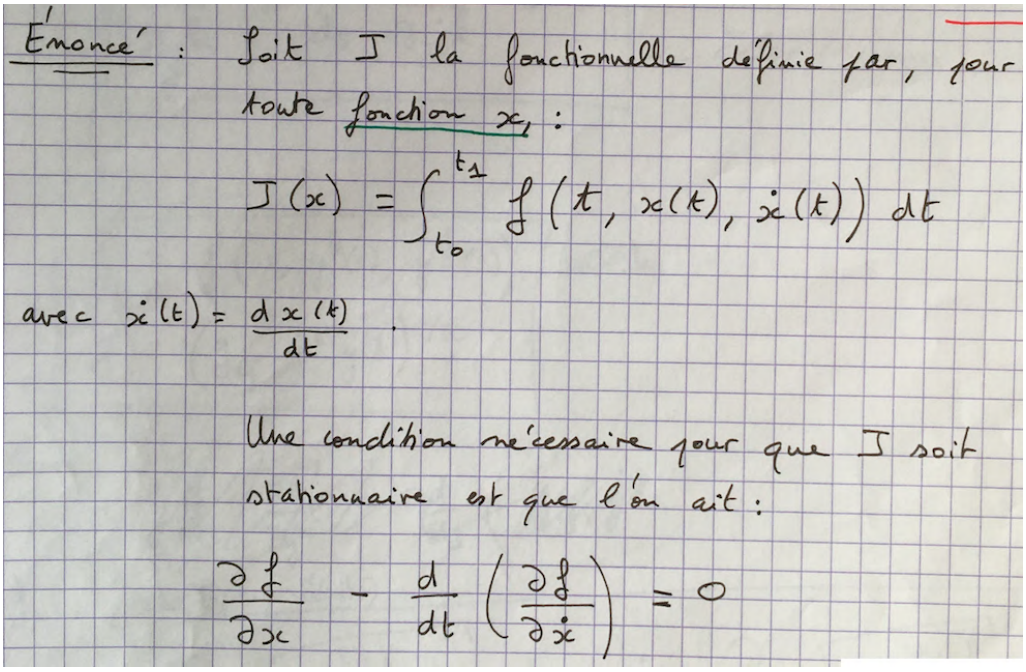
Plan de la démonstration – (les détails seront donnés au tableau).

Lagrangien et action. Un Lagrangien est une quantité qui décrit l'énergie d'un système physique : Lagrangien= énergie cinétique − énergie potentielle. L'action est définit comme l'intégrale de ce Lagrangien, par exemple par rapport au temps t.





Théorème d'Euler-Lagrange.



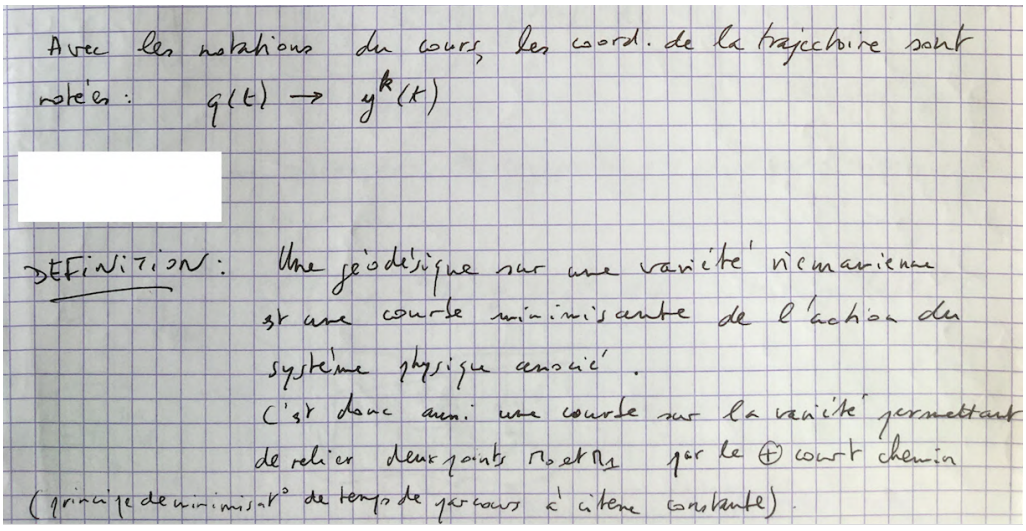
Énoncé : Soit J la fonctionnelle définie par, pour toute fonction x_1 :

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} f\left(t, x(t), \dot{x}(t)\right) dt$$

avec $\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

Une condition nécessaire pour que J soit stationnaire est que l'on ait :

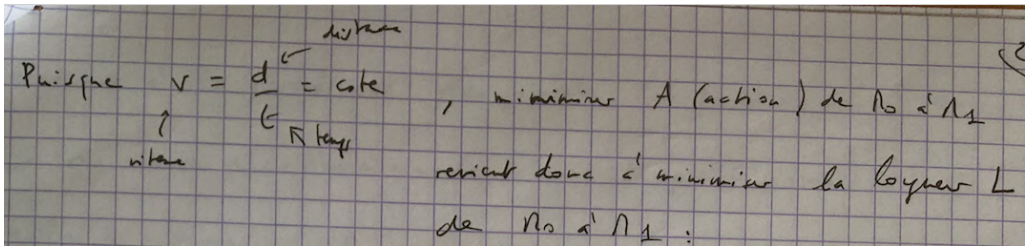
$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

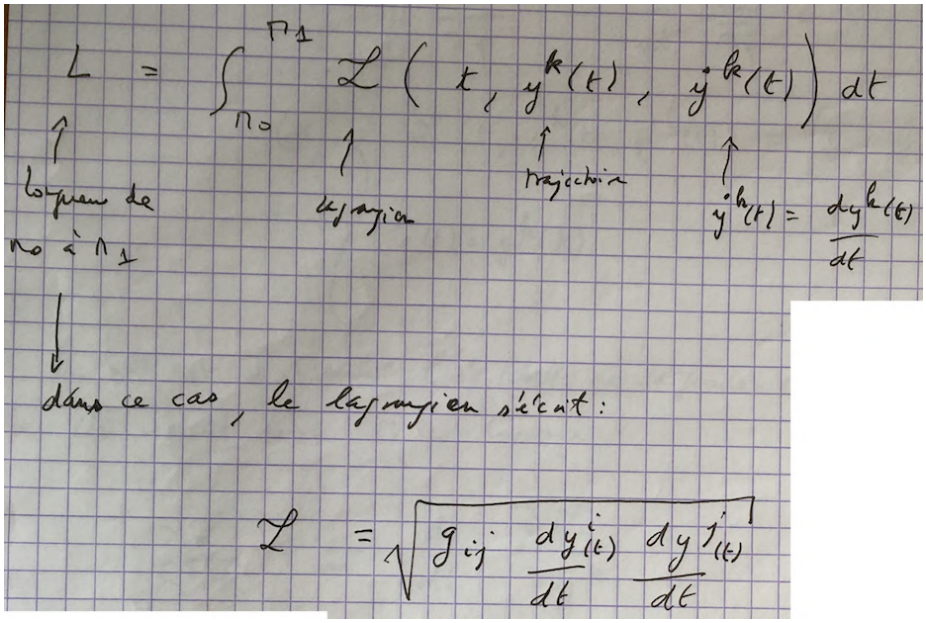


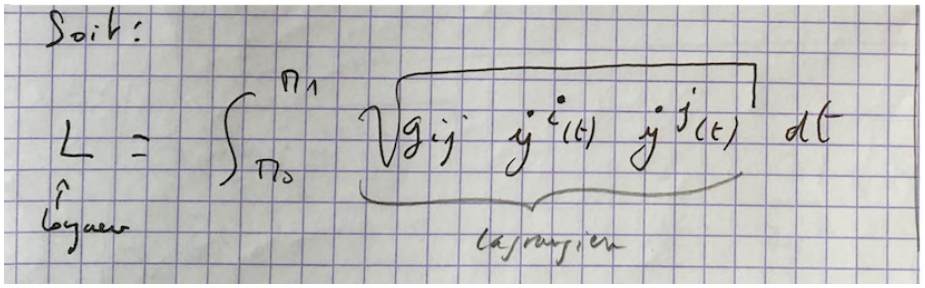
Avec les notations du cours, les coord. de la trajectoire sont notées : $q(t) \to y^k(t)$

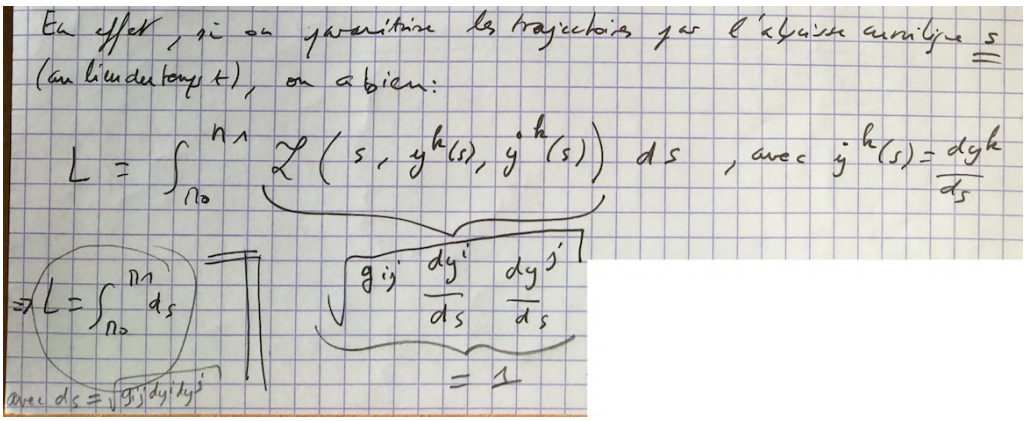
DÉFINITION : Une géodésique sur une variété riemannienne est une courbe minimisante de l'action du système physique associé.
C'est donc aussi une courbe sur la variété permettant de relier deux points n_0 et n_1 par le (±) court chemin (principe de minimisation du temps de parcours à vitesse constante).

Trouver le Lagrangien.

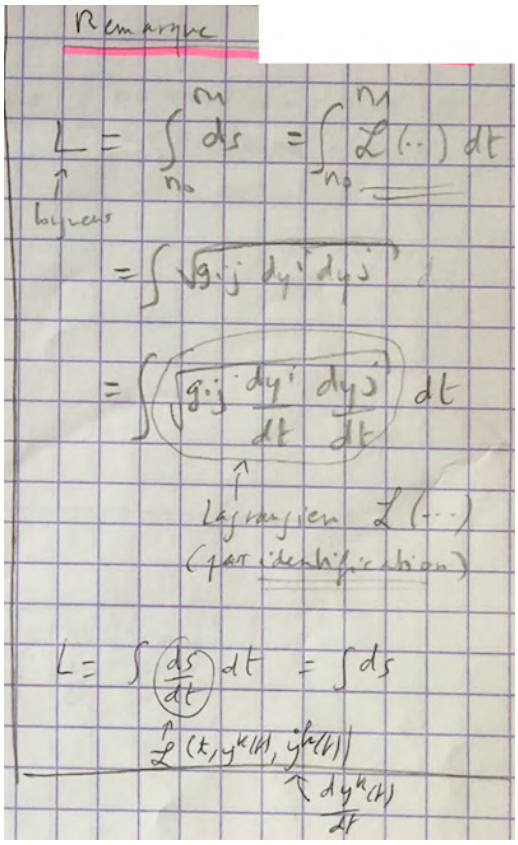




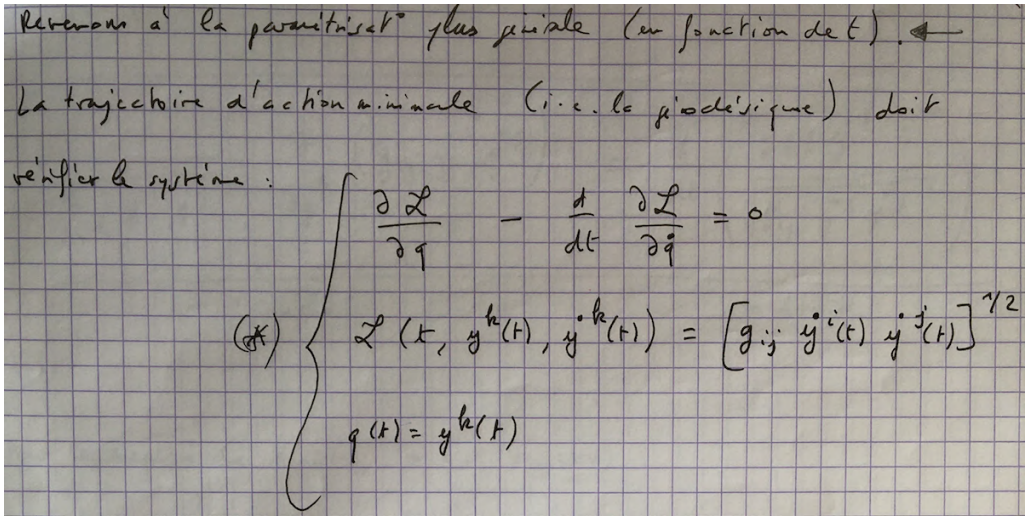


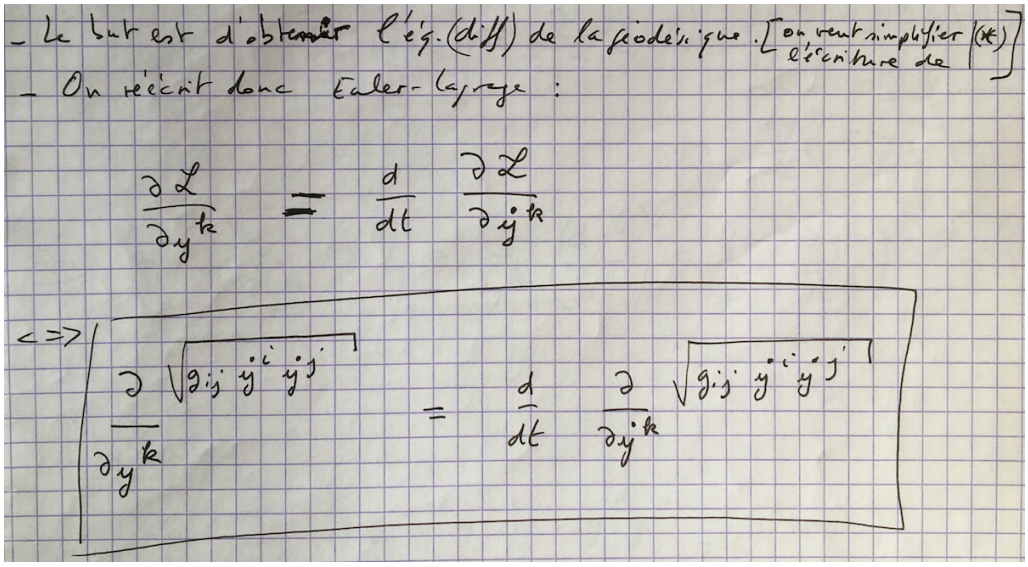

En effet, si on paramètre les trajectoires par l'abscisse curviligne s
(au lieu du temps t), on a bien :
$L = \int_{n_0}^{n_1} \mathcal{L}\left(s, y^k(s), \dot{y}^k(s)\right) ds$, avec $\dot{y}^k(s) = \frac{dy^k}{ds}$
$\Rightarrow L = \int_{n_0}^{n_1} ds$
avec $ds = \sqrt{g_{ij} dy^i dy^j}$
$\sqrt{g_{ij} \frac{dy^i}{ds} \frac{dy^j}{ds}}$
$= 1$

Remarque :

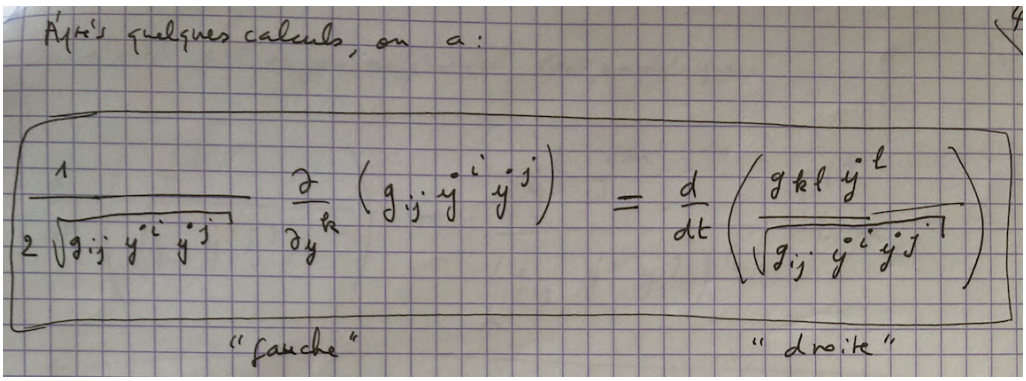

Remarque
$L = \int_{n_0}^{n_1} ds = \int_{n_0}^{n_1} \mathcal{L}(\dots)\, dt$
↑ longueurs
$= \int \sqrt{g_{ij}\, dy^i dy^j}$
$= \int \sqrt{g_{ij} \frac{dy^i}{dt} \frac{dy^j}{dt}}\, dt$
↑
Lagrangien $\mathcal{L}(\dots)$
(par identification)
$L = \int \frac{ds}{dt}\, dt = \int ds$
$\mathcal{L}(t, y^k(t), \dot{y}^k(t))$
↑ $\frac{dy^k(t)}{dt}$

Revenons à la paramétrisation plus générale (en fonction de t) :

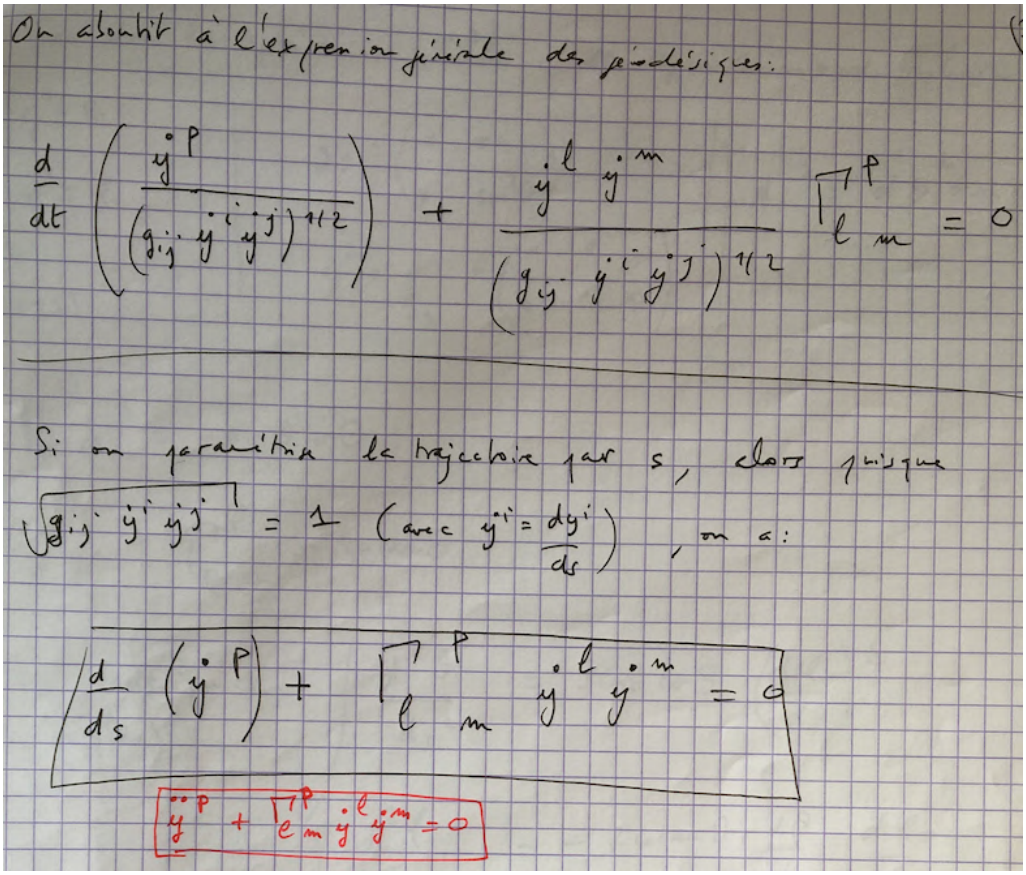


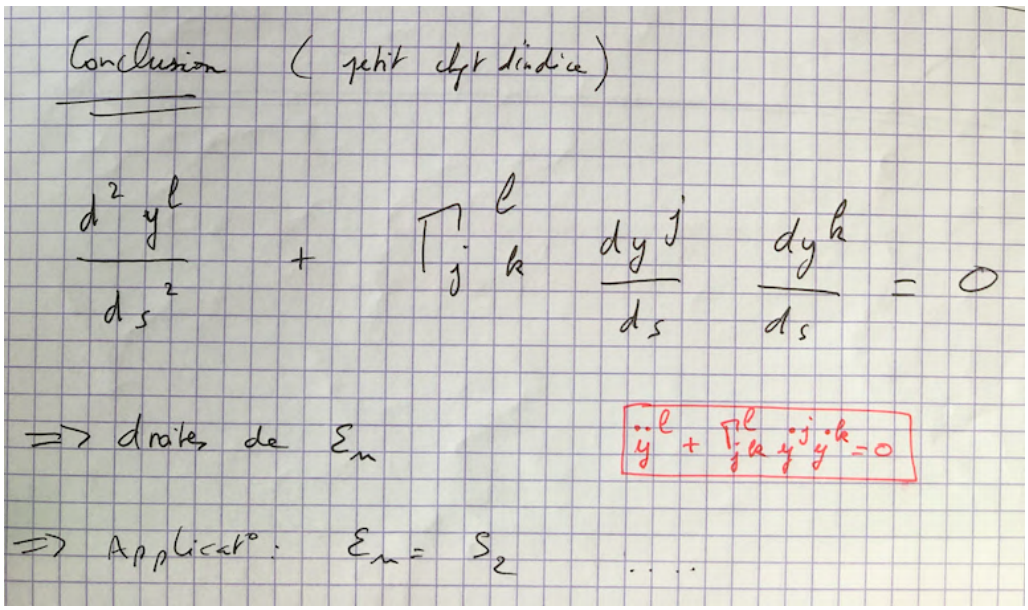


C'est parti pour les calculs..! – voir tableau !

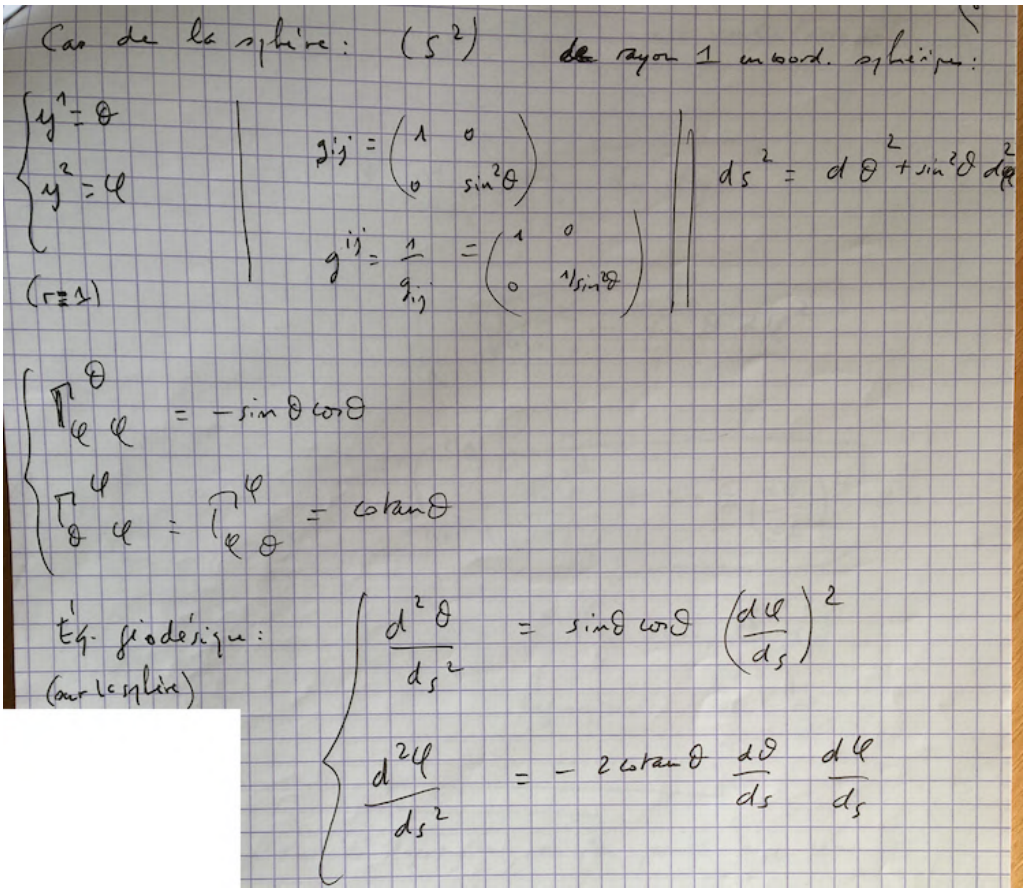


On continue les calculs..! – voir tableau !




Conclusion (petit dyt dindice)
$\frac{d^2 y^l}{ds^2} + \Gamma^l_{jk} \frac{dy^j}{ds} \frac{dy^k}{ds} = 0$
$\Rightarrow$ droites de $\mathcal{E}_m$
$\ddot{y}^l + \Gamma^l_{jk} \dot{y}^j \dot{y}^k = 0$
$\Rightarrow$ Applicat° : $\mathcal{E}_m = S_2$
. . . .

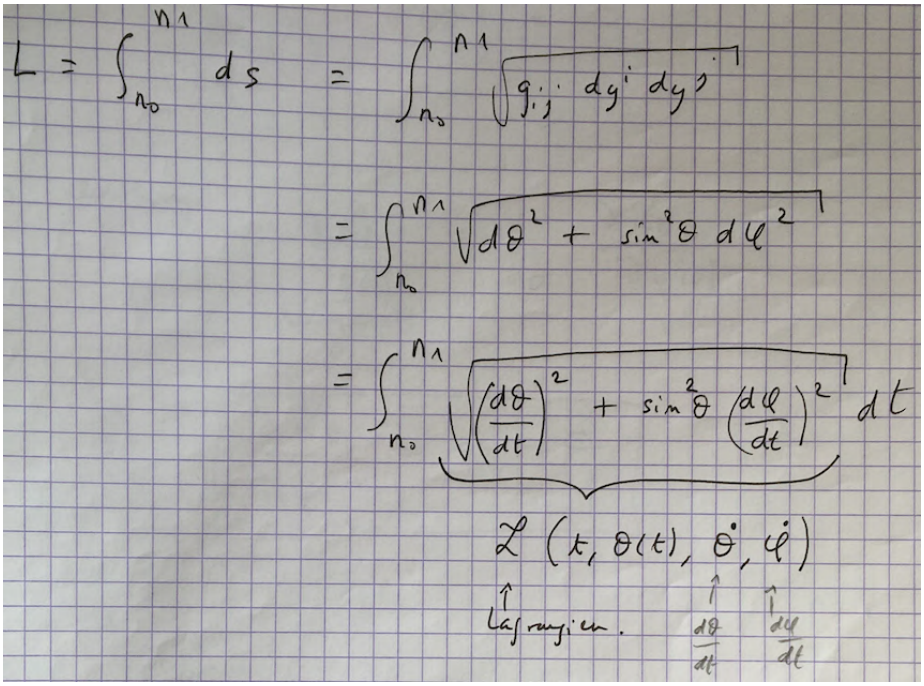
Exemple : les géodésiques de la sphère usuelle, $S_2(\theta, \varphi)$

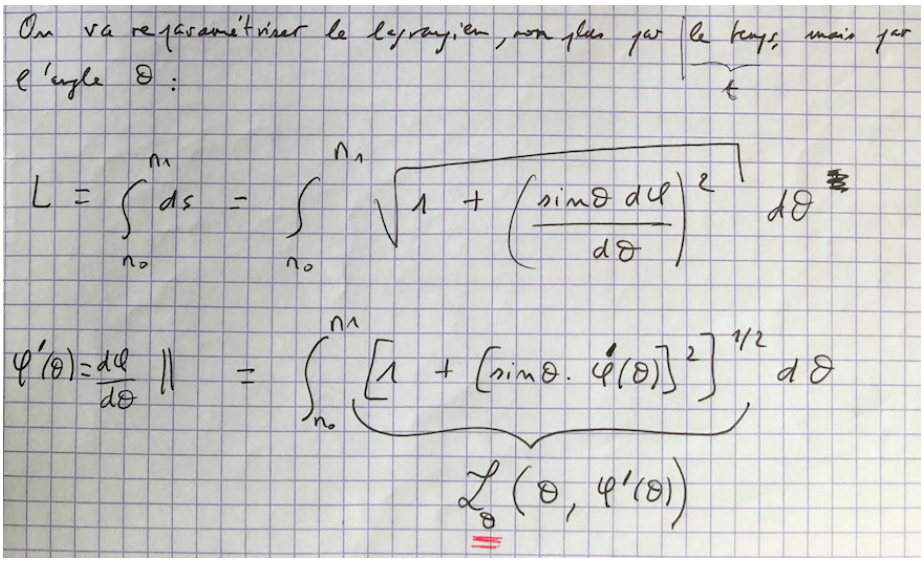


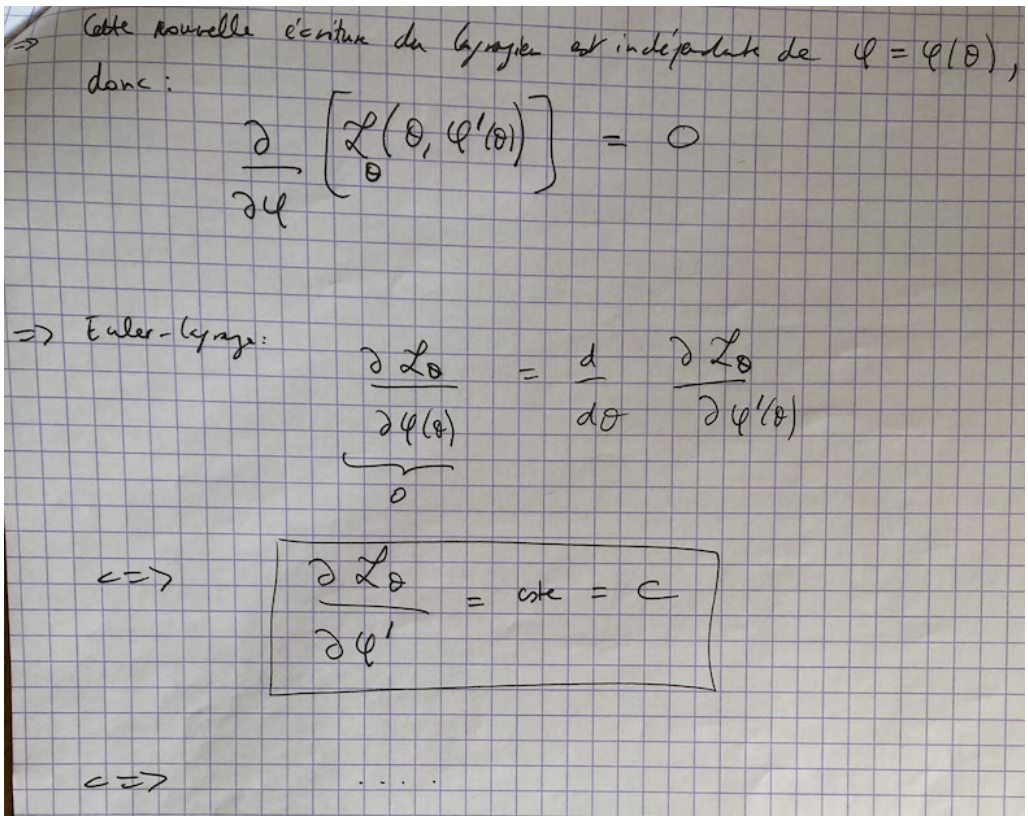
On ne sait pas, a priori, résoudre ce système d'équations différentielles !

A partir de maintenant, voir aussi les vidéos complémentaires à ce cours !!!

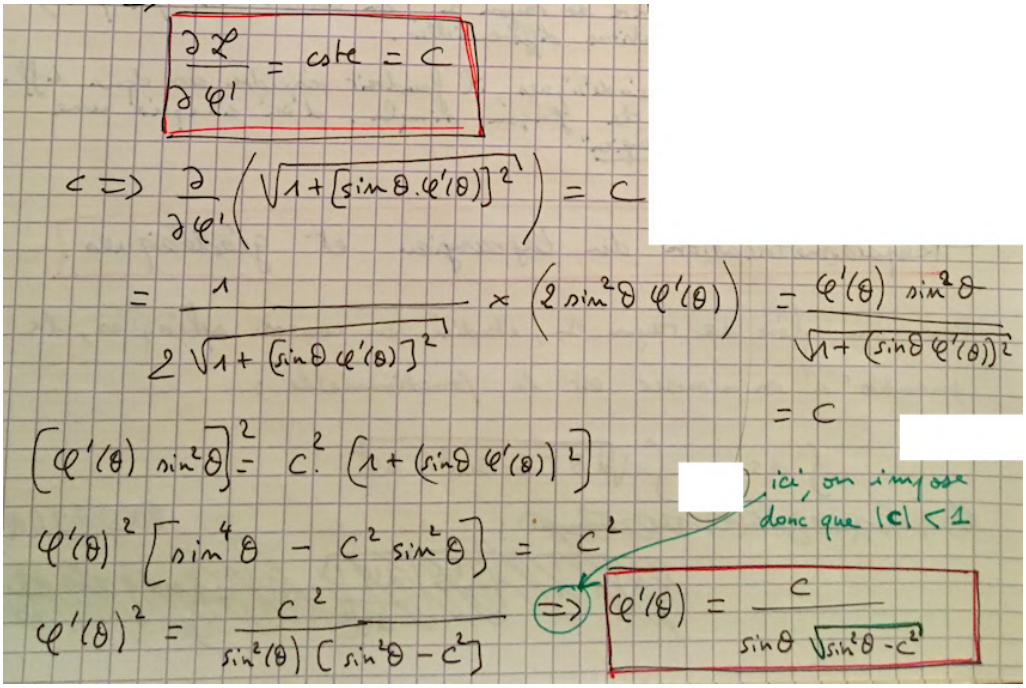
Idée qui va nous sortir de cette impasse : reparamétrisation du Lagrangien.

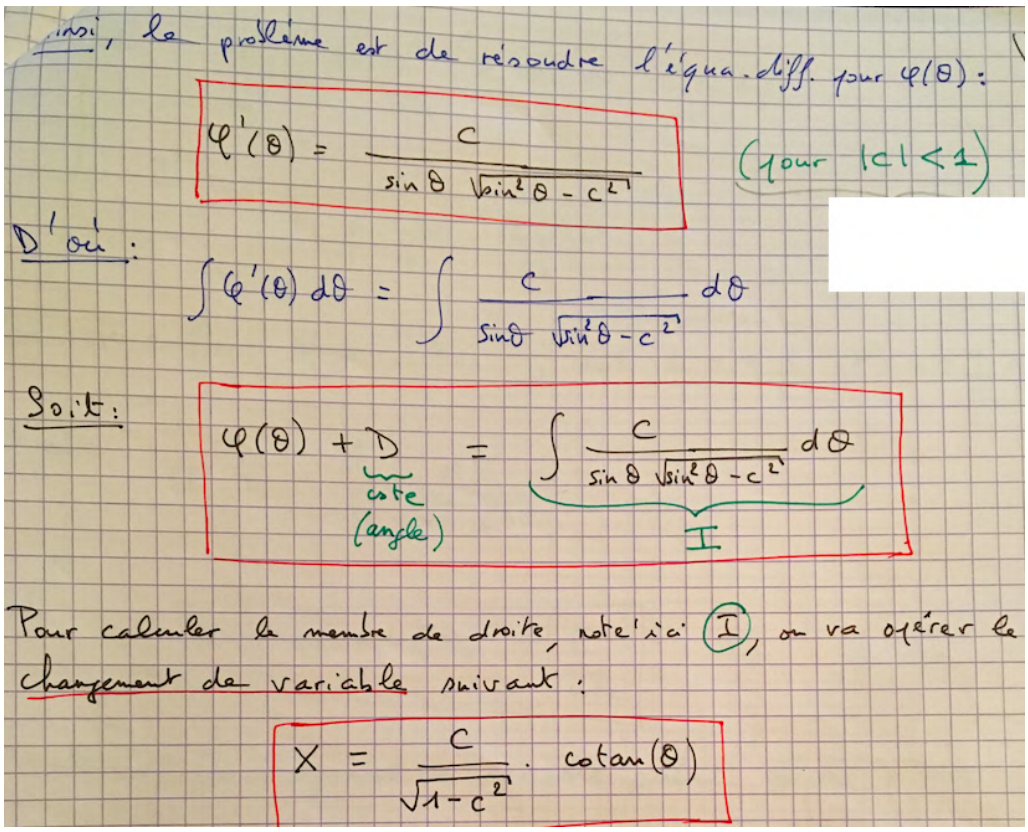


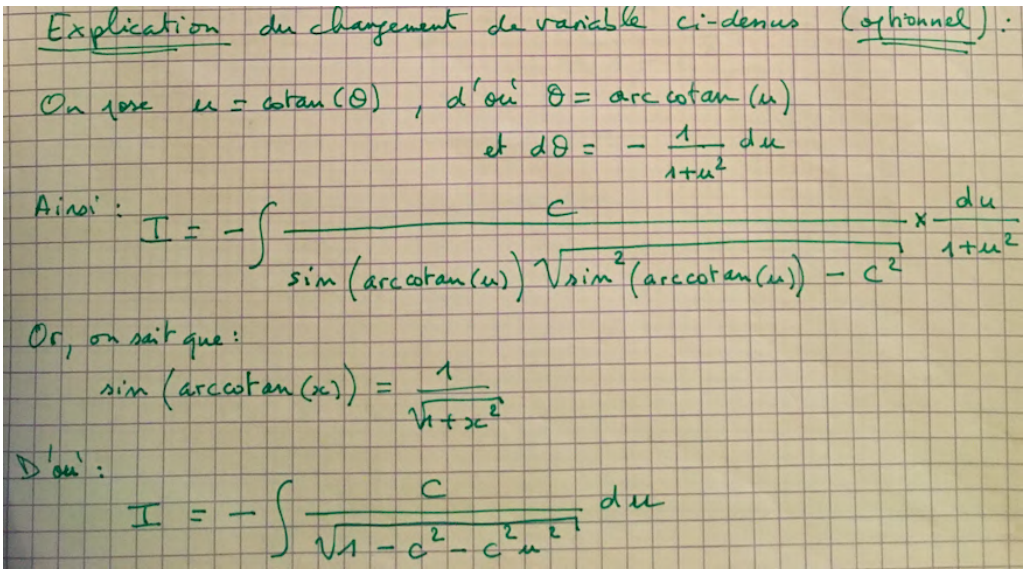


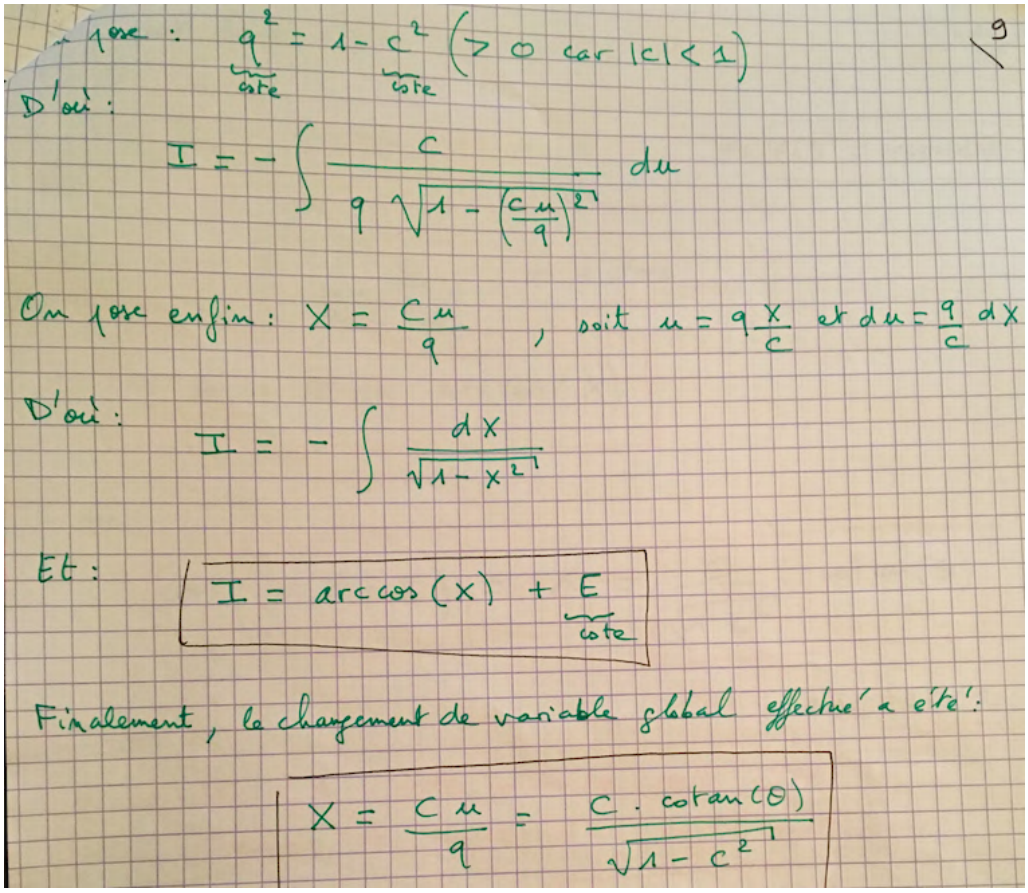

⇒ Cette nouvelle écriture du Lagrangien est indépendante de $\varphi = \varphi(\theta)$, donc :
$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\mathcal{L}_\theta(\theta, \varphi'(\theta))\right] = 0$
⇒ Euler-Lagrange :
$\frac{\partial \mathcal{L}_\theta}{\partial \varphi(\theta)} = \frac{d}{d\theta}\frac{\partial \mathcal{L}_\theta}{\partial \varphi'(\theta)}$
0
⇔
$\frac{\partial \mathcal{L}_\theta}{\partial \varphi'} = \text{cste} = C$
⇔ ....

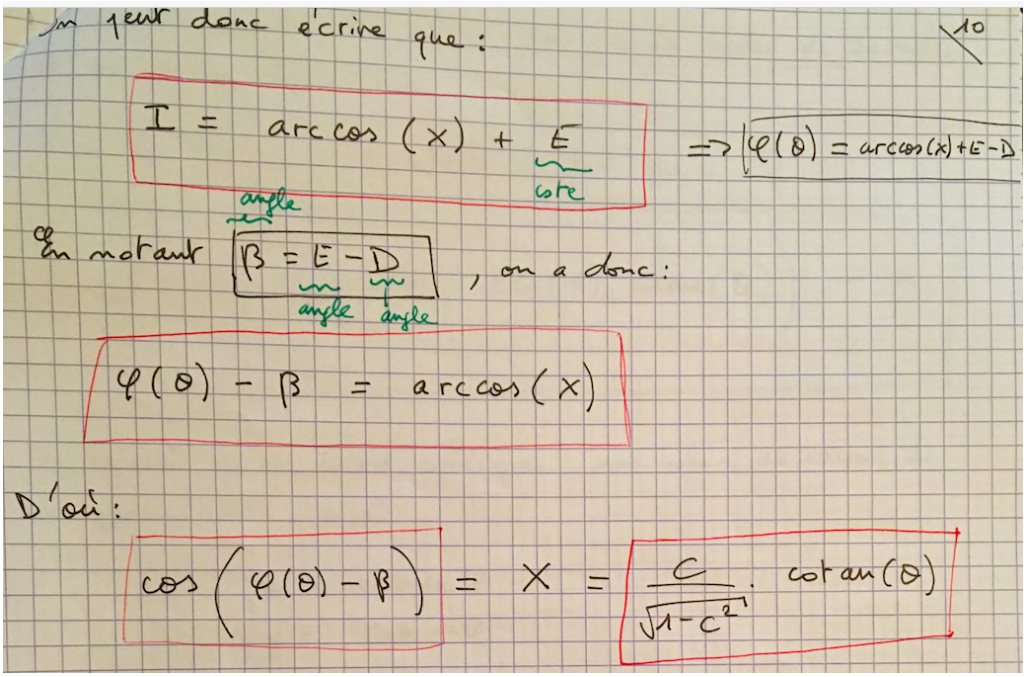
C'est reparti pour les calculs, et les changements de variables ! – voir ci-dessous.

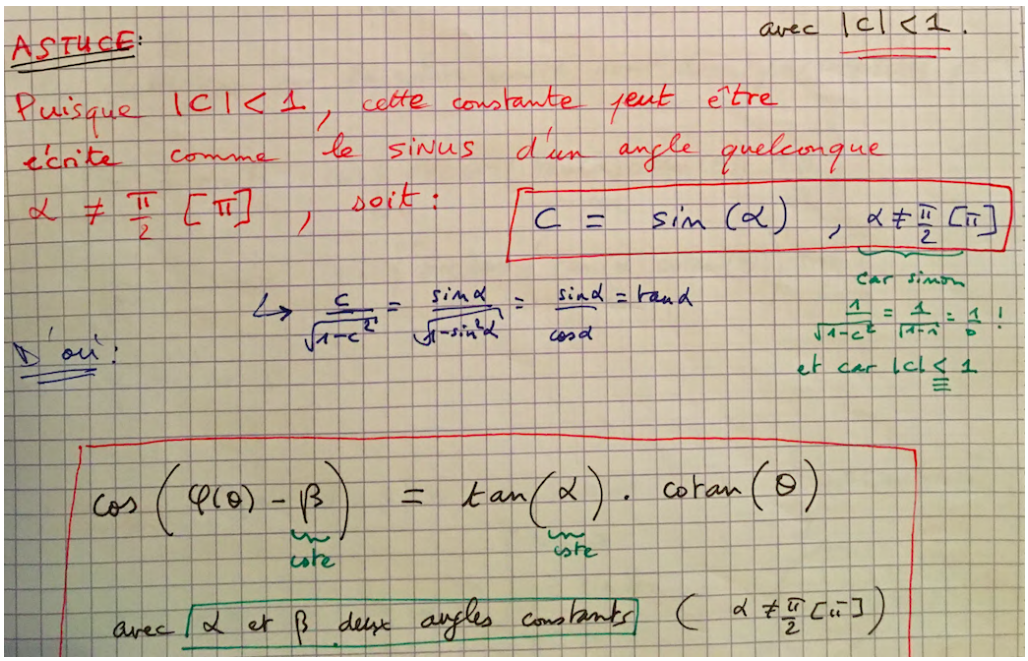


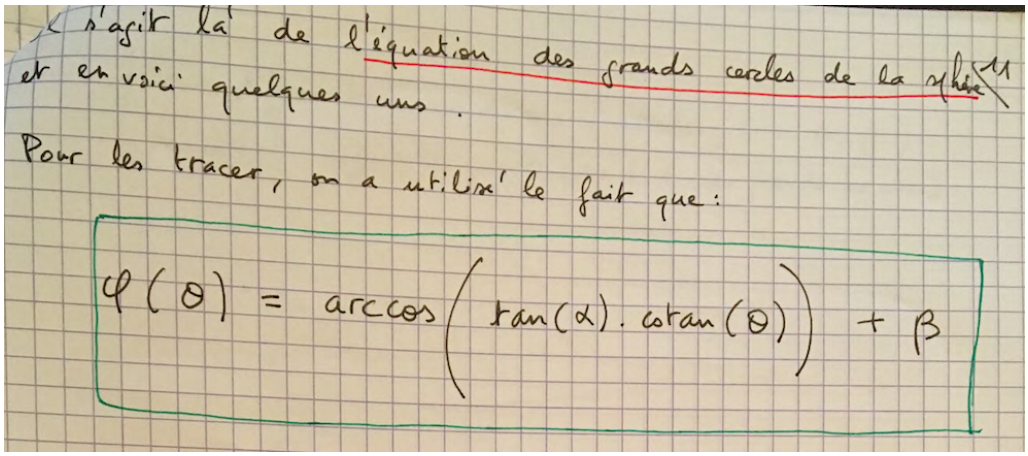

Ainsi, le problème est de résoudre l'équa. diff. pour φ(θ) :
$\varphi'(\theta) = \frac{c}{\sin\theta \sqrt{\sin^2\theta - c^2}}$
(pour $|c| < 1$)
D'où :
$\int \varphi'(\theta)\, d\theta = \int \frac{c}{\sin\theta \sqrt{\sin^2\theta - c^2}}\, d\theta$
Soit :
$\varphi(\theta) + D = \int \frac{c}{\sin\theta \sqrt{\sin^2\theta - c^2}}\, d\theta$
D : cste (angle)
I
Pour calculer le membre de droite, noté ici (I), on va opérer le changement de variable suivant :
$X = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \cdot \cot an(\theta)$


Explication du changement de variable ci-dessus (optionnel) :
On pose $u = \cot an(\theta)$, d'où $\theta = \text{arc cotan}(u)$
et $d\theta = -\frac{1}{1+u^2} du$
Ainsi : $I = -\int \frac{c}{\sin(\text{arccotan}(u)) \sqrt{\sin^2(\text{arccotan}(u)) - c^2}} \times \frac{du}{1+u^2}$
Or, on sait que :
$\sin(\text{arccotan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
D'où :
$I = -\int \frac{c}{\sqrt{1 - c^2 - c^2 u^2}} du$


9
On pose : $q^2 = 1 - c^2$ (> 0 car $|c| < 1$)
cste cste
D'où :
$I = -\int \frac{c}{q\sqrt{1-\left(\frac{cu}{q}\right)^2}}\,du$
On pose enfin : $X = \frac{cu}{q}$, soit $u = q\frac{X}{c}$ et $du = \frac{q}{c}\,dX$
D'où : $I = -\int \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}}$
Et : $I = \arccos(X) + \underbrace{E}_{\text{cste}}$
Finalement, le changement de variable global effectué a été :
$X = \frac{cu}{q} = \frac{c \cdot \cot an(\theta)}{\sqrt{1-c^2}}$


On peut donc écrire que :
10
$I = \arccos(X) + E$
E : cste
$\Rightarrow \varphi(\theta) = \arccos(X) + E - D$
angle
En notant $\beta = E - D$, on a donc :
angle angle
$\varphi(\theta) - \beta = \arccos(X)$
D'où :
$\cos(\varphi(\theta) - \beta) = X = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \cdot \cot an(\theta)$


ASTUCE:
avec $|c|<1$.
Puisque $|c|<1$, cette constante peut être écrite comme le sinus d'un angle quelconque $\alpha \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, soit :
$c = \sin(\alpha)$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$
car sinon $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-1}} = \frac{1}{0}$!
et car $|c| \leq 1$
$\hookrightarrow \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$
Donc :
$\cos(\varphi(\theta) - \beta) = \tan(\alpha) \cdot \operatorname{cotan}(\theta)$
une cste
une cste
avec α et β deux angles constants ($\alpha \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$)


Il s'agit là de l'équation des grands cercles de la sphère
et en voici quelques uns.
Pour les tracer, on a utilisé le fait que :
$\varphi(\theta) = \arccos\left(\tan(\alpha) \cdot \operatorname{cotan}(\theta)\right) + \beta$

... on a donc aboutit aux trajectoires suivies par les ondes de surfaces à la surface de la Terre. Ou, plus exactement, on aboutit aux trajectoires géodésiques correspondant à la sphère unité, $S_2(\theta, \varphi)$. On appelle ces trajectoires des (arcs de) GRANDS CERCLES !!!

On rappelle qu'en coord. sphériques, une sphère de rayon 1 est paramétrisée ainsi :

$$\begin{cases} x = \sin\theta \cos\varphi \\ y = \sin\theta \sin\varphi \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

Les géodésiques sur la sphère unité sont donc paramétrées par :

$$\begin{cases} x = \sin\theta \cdot \cos\left[\arccos\left(\tan(\alpha)\cot\an(\theta) \right) + \beta \right] \\ y = \sin\theta \cdot \sin\left[\arccos\left(\tan(\alpha)\cot\an(\theta) \right) + \beta \right] \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

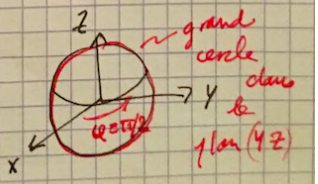
(α, β : constantes)

Remarque : pour $\alpha = \beta = 0$, on obtient :

$$\varphi(\theta) = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = \sin\theta \\ z = \cos\theta \end{cases}$$

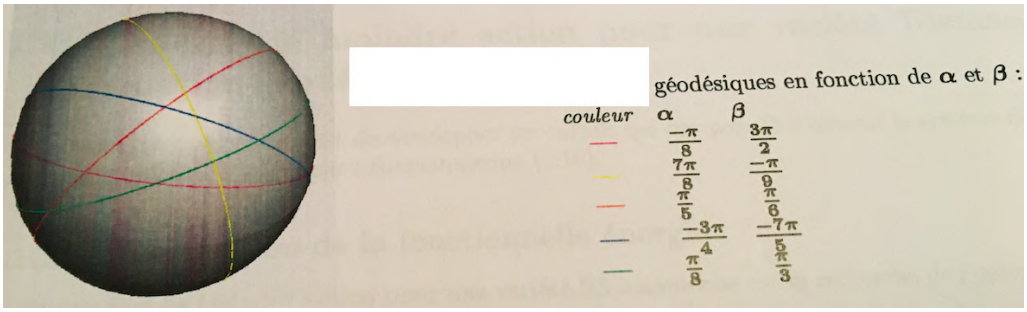
méridien de longitude 90° } grand cercle

(rappel : $\arccos(x=0) = \frac{\pi}{2}$)



Pour différentes conditions initiales, (i.e. α, β) on obtient différentes géodésiques (i.e. des grands cercles).

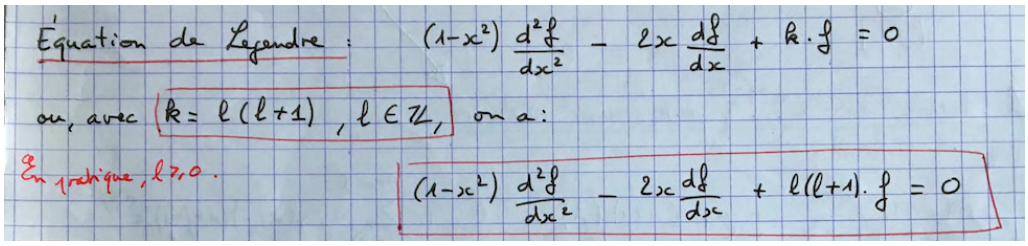
Exemple :



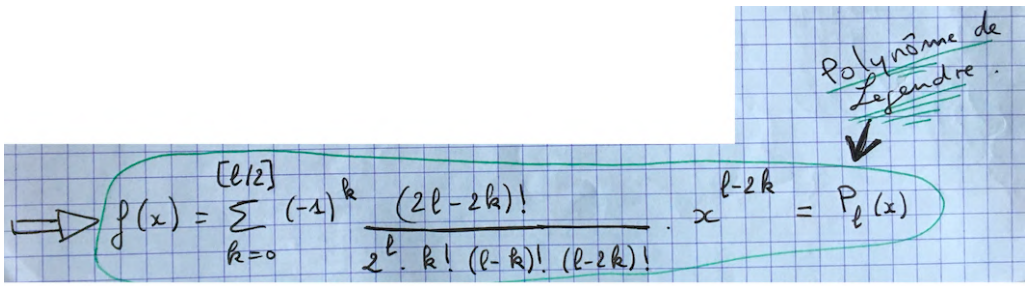
Chapter 8

Polynômes de Legendre (associés)

On cherche les fonctions $f(x)$ solutions de l'équation de Legendre:

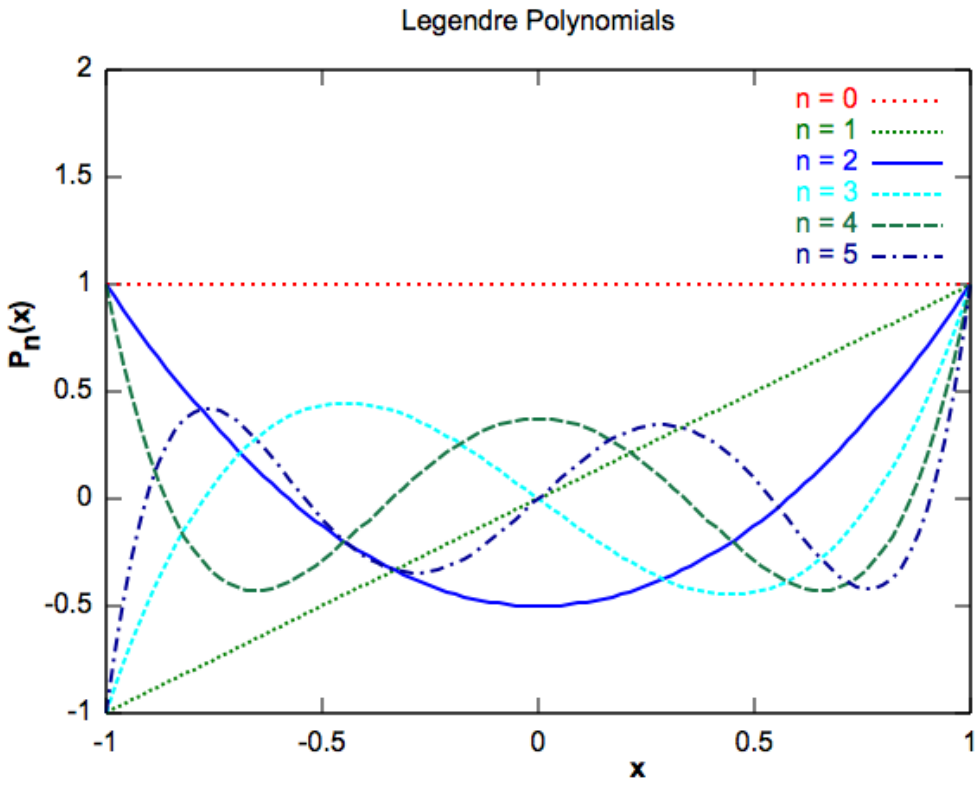


En considérant le cas particulier où $k = \ell(\ell+1)$, avec ℓ un entier (en pratique on considère $\ell \geq 0$, les fonctions $f(x)$ solutions sont les polynômes de Legendre, qu'on note $P_\ell(x)$ (polynôme de degré ℓ). Remarque : Les polynômes de Legendre sont définis uniquement pour $x \in [-1;1]$ (les points $x = \pm 1$ sont des points singuliers réguliers de cette équation différentielle).

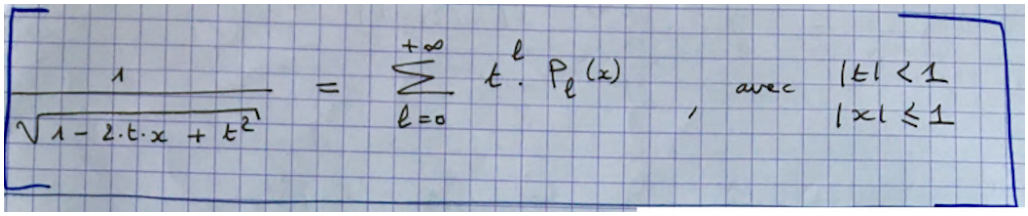


où $[\ell/2] = \begin{cases} \ell/2 & \text{si } \ell \text{ pair} \\ \frac{\ell-1}{2} & \text{si } \ell \text{ impair} \end{cases}$

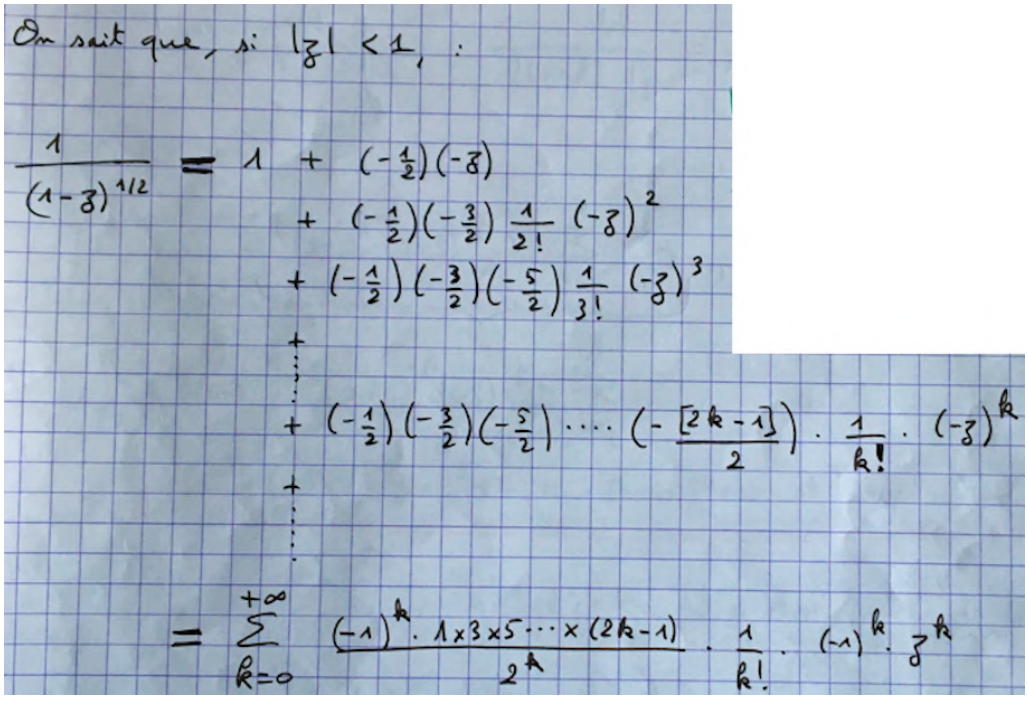
Exemple de polynômes de Legendre, ici notés $P_n(x)$, de degré $n \geq 0$ (entier naturel) , avec $x \in [-1;1]$ (d'après Wiki).



Fonction génératrice des polynômes de Legendre.



Démonstration (de la formule précédente).



$(-1)^k (-1)^k = (-1)^{2k} = 1$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k-1) \cdot (2k)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2k} \cdot \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot z^k$$

$2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot 2k = 2^k \cdot k!$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2} \cdot z^k$$

Or : $\dfrac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - t(2x-t)}}$ $\Rightarrow z = (2x-t)t$

D'où :

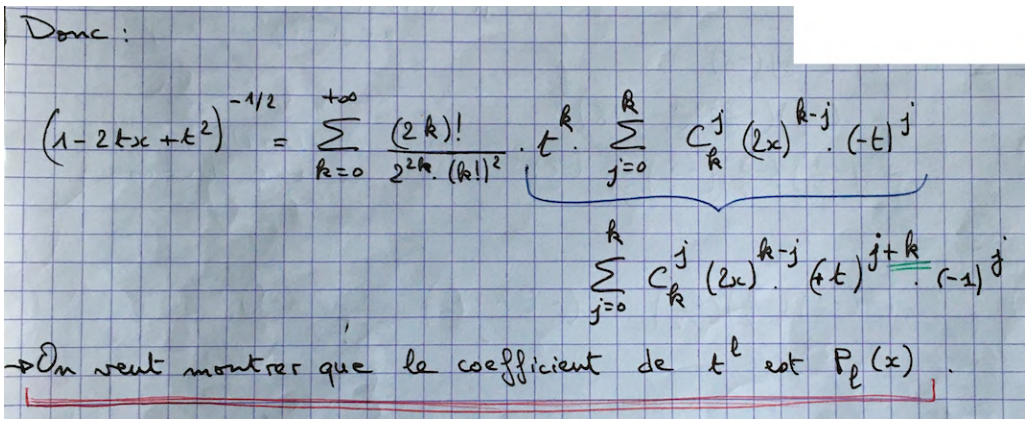
$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot (k!)^2} \cdot t^k \cdot (2x-t)^k$$

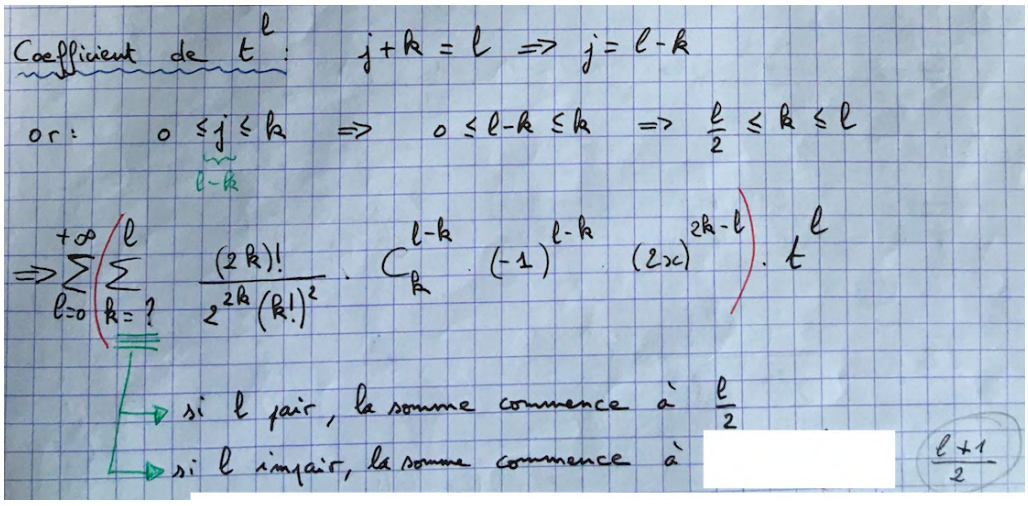
z^k

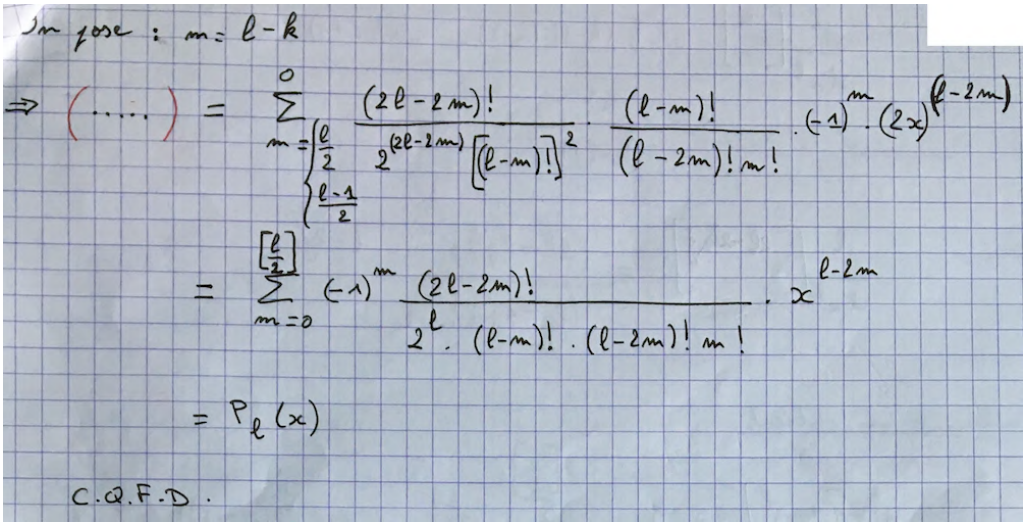
De plus :

$$(2x-t)^k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \cdot (2x)^{k-j} \cdot (-t)^j$$

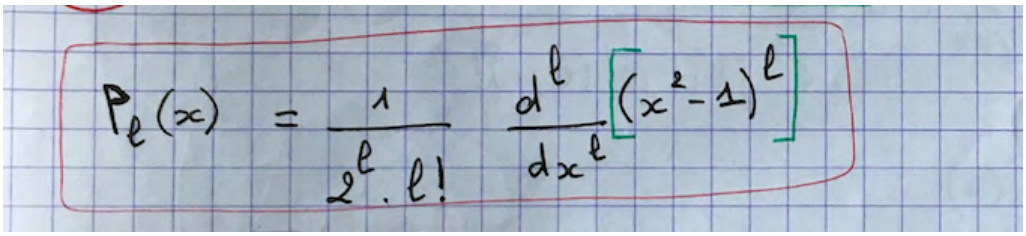
avec $C_k^j = \dfrac{k!}{j!\,(k-j)!}$


Donc :
$(1-2tx+t^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}\cdot(k!)^2} \cdot t^k \cdot \sum_{j=0}^{k} C_k^j (2x)^{k-j} \cdot (-t)^j$
$\sum_{j=0}^{k} C_k^j (2x)^{k-j} \cdot (+t)^{j+k} \cdot (-1)^j$
→ On veut montrer que le coefficient de t^l est $P_l(x)$.

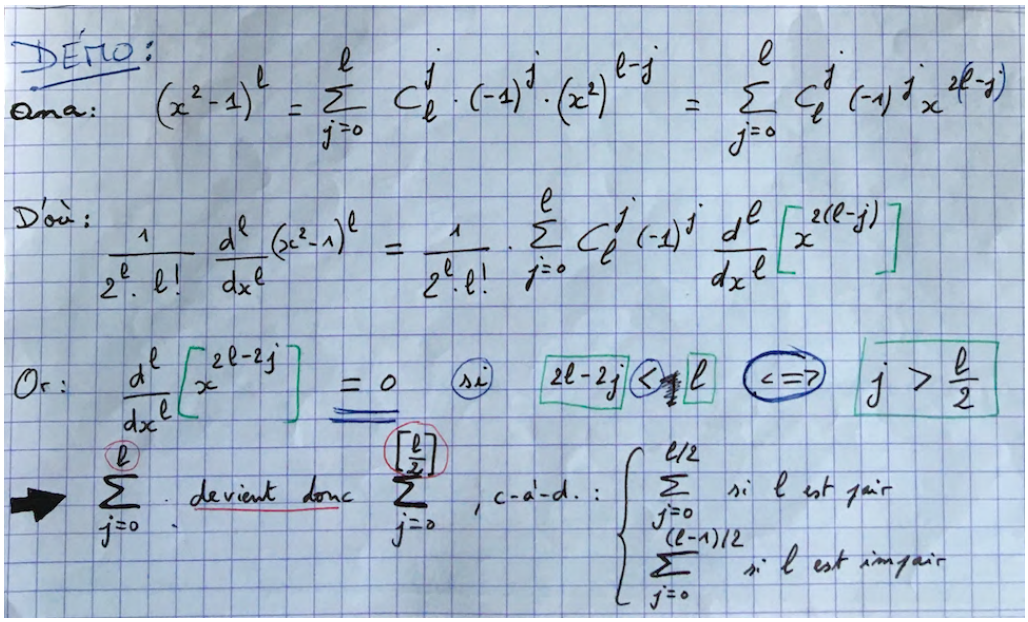

Coefficient de t^l : $j+k=l \Rightarrow j=l-k$
or : $0 \leq j \leq k \Rightarrow 0 \leq l-k \leq k \Rightarrow \frac{l}{2} \leq k \leq l$
$\Rightarrow \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=?}^{l} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot C_k^{l-k} (-1)^{l-k} (2x)^{2k-l} \right) \cdot t^l$
si l pair, la somme commence à $\frac{l}{2}$
si l impair, la somme commence à $\frac{l+1}{2}$

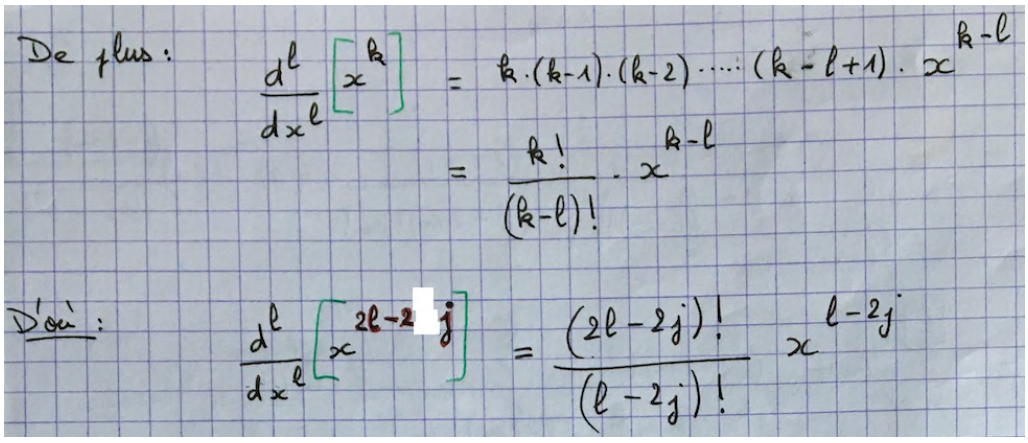


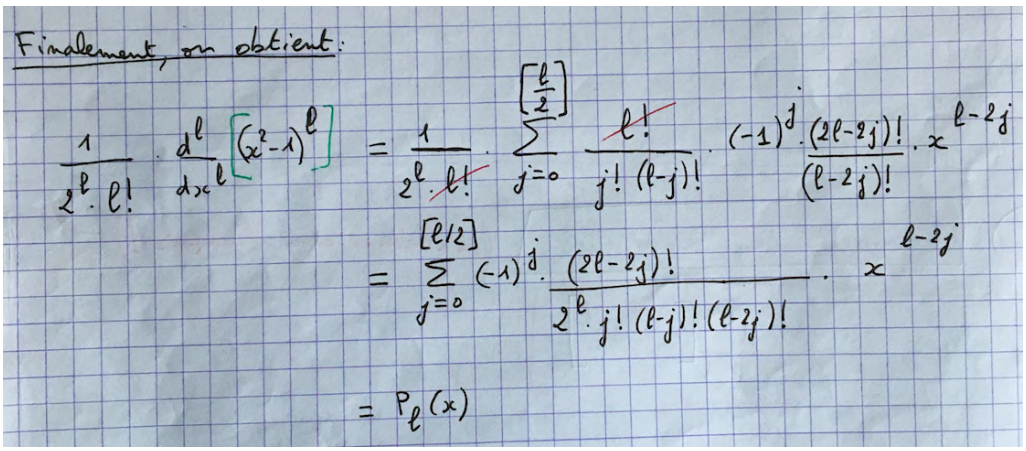
Formule de Rodrigues (mathématicien français :)



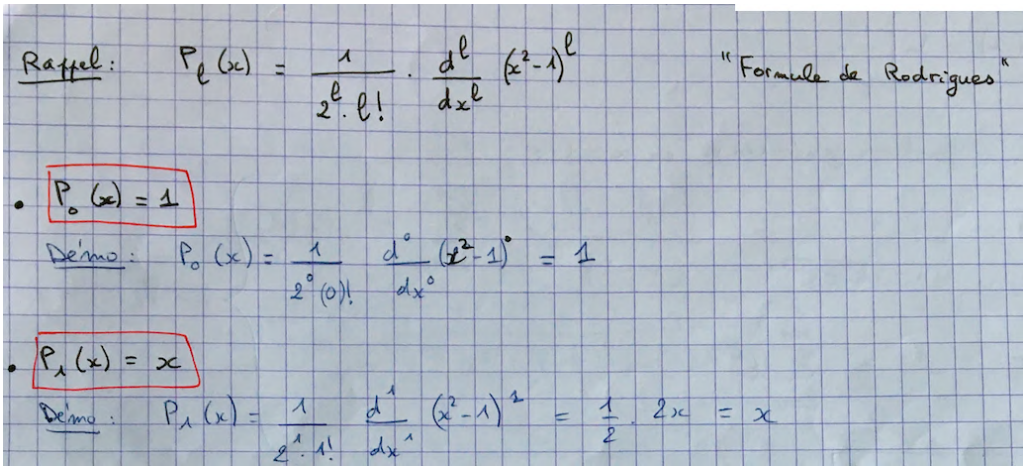
Démo (de la formule précédente).

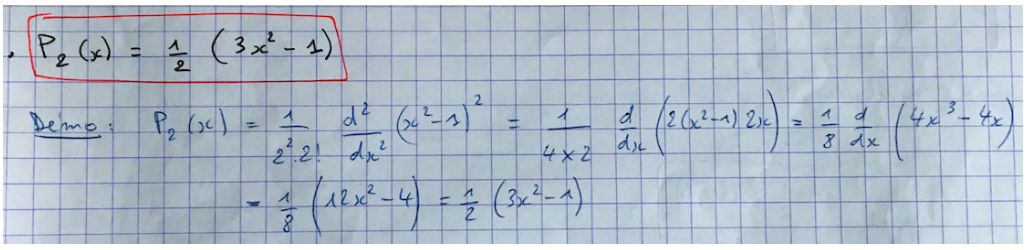


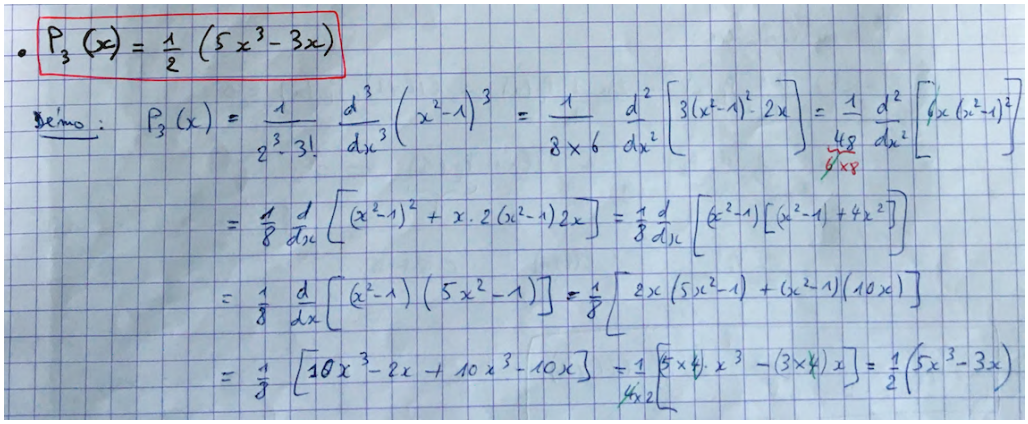


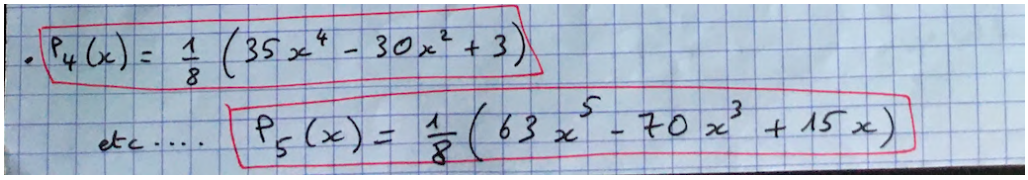


Exemples de calculs de polynômes de Legendre (il y a plusieurs manières de les calculer, avec notamment les formules précédentes — mais il y a aussi d'autres formules de récurrence qui peuvent être très utiles, comme nous le verrons en TD).

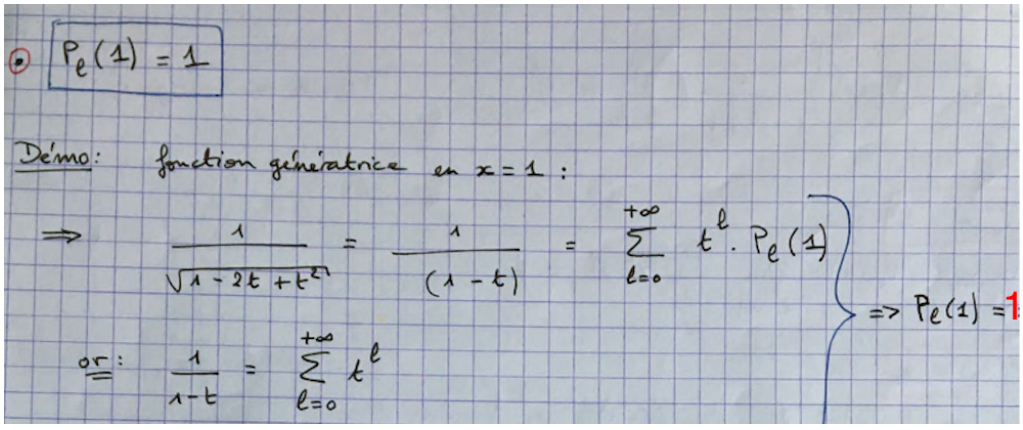


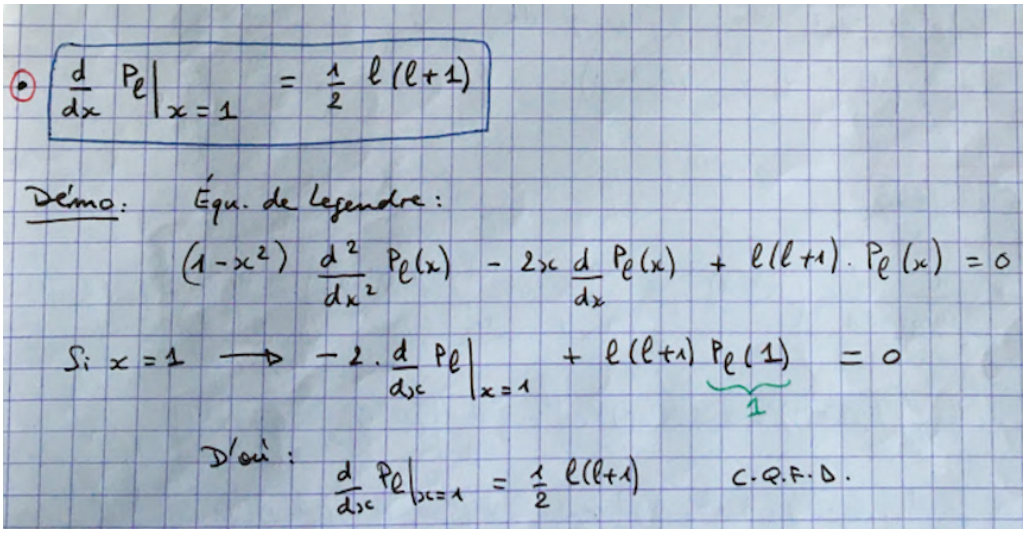


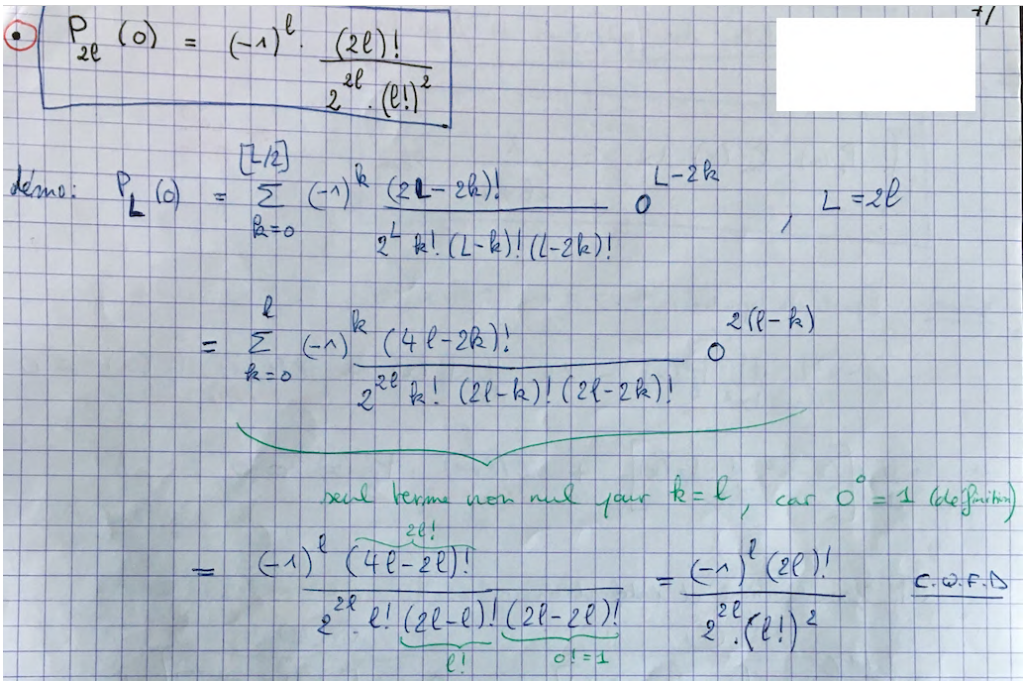




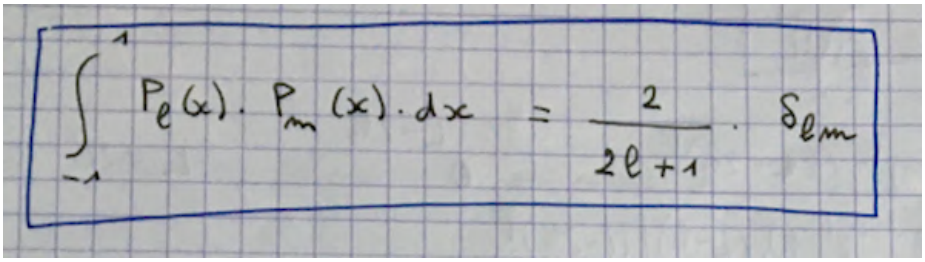
Quelques valeurs particulières des polynômes de Legendre.




$\frac{d}{dx} P_\ell\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}\ell(\ell+1)$
Démo: Équ. de Legendre :
$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}P_\ell(x) - 2x\frac{d}{dx}P_\ell(x) + \ell(\ell+1)\cdot P_\ell(x) = 0$
Si $x=1$ $\longrightarrow$ $-2\cdot\frac{d}{dx}P_\ell\Big|_{x=1} + \ell(\ell+1)\underbrace{P_\ell(1)}_{1} = 0$
D'où : $\frac{d}{dx}P_\ell\Big|_{x=1} = \frac{1}{2}\ell(\ell+1)$ C.Q.F.D.

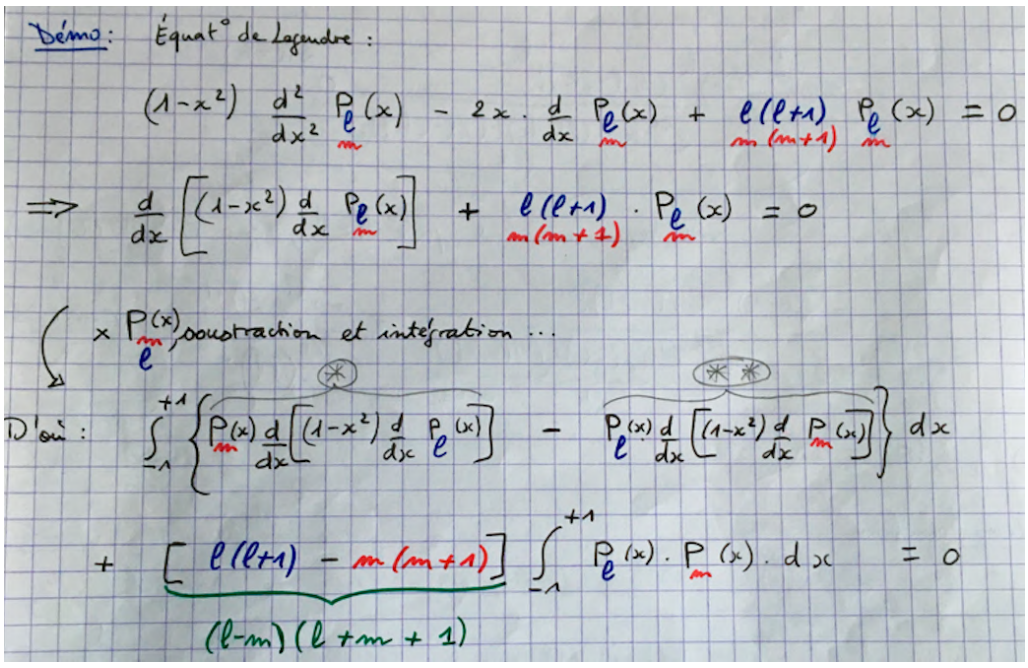

$P_{2\ell}(0) = (-1)^\ell \cdot \frac{(2\ell)!}{2^{2\ell}\cdot(\ell!)^2}$
Démo: $P_L(0) = \sum_{k=0}^{[L/2]} (-1)^k \frac{(2L-2k)!}{2^L\, k!\,(L-k)!\,(L-2k)!}\, 0^{L-2k}$, $L=2\ell$
$= \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \frac{(4\ell-2k)!}{2^{2\ell}\, k!\,(2\ell-k)!\,(2\ell-2k)!}\, 0^{2(\ell-k)}$
seul terme non nul pour $k=\ell$, car $0^0 = 1$ (définition)
$= (-1)^\ell \frac{(4\ell-2\ell)!}{2^{2\ell}\cdot \ell!\,(2\ell-\ell)!\,(2\ell-2\ell)!}$ ($2\ell!$ / $\ell!$ / $0!=1$)
$= \frac{(-1)^\ell (2\ell)!}{2^{2\ell}\cdot(\ell!)^2}$ C.Q.F.D

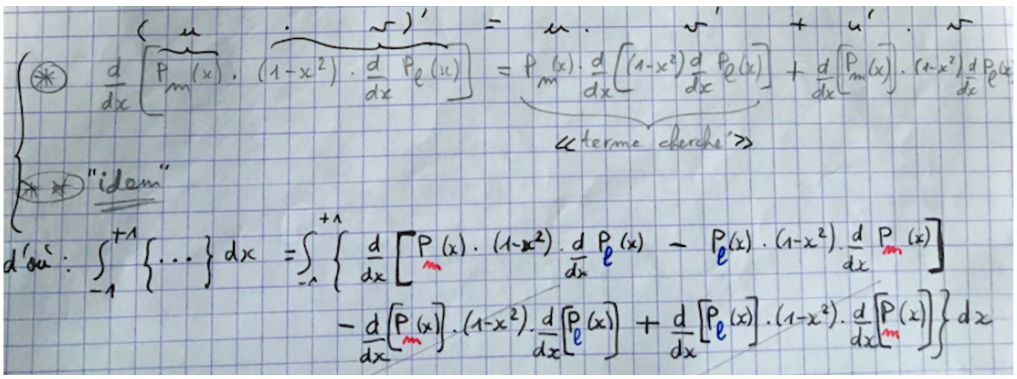
Orthogonalité des polynômes de Legendre.

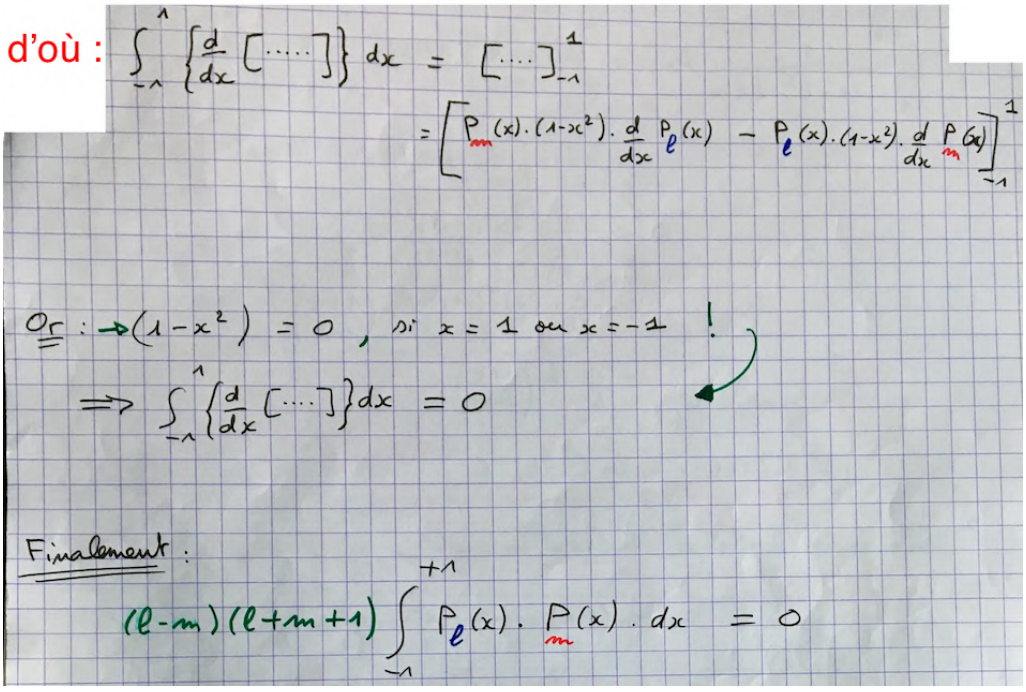


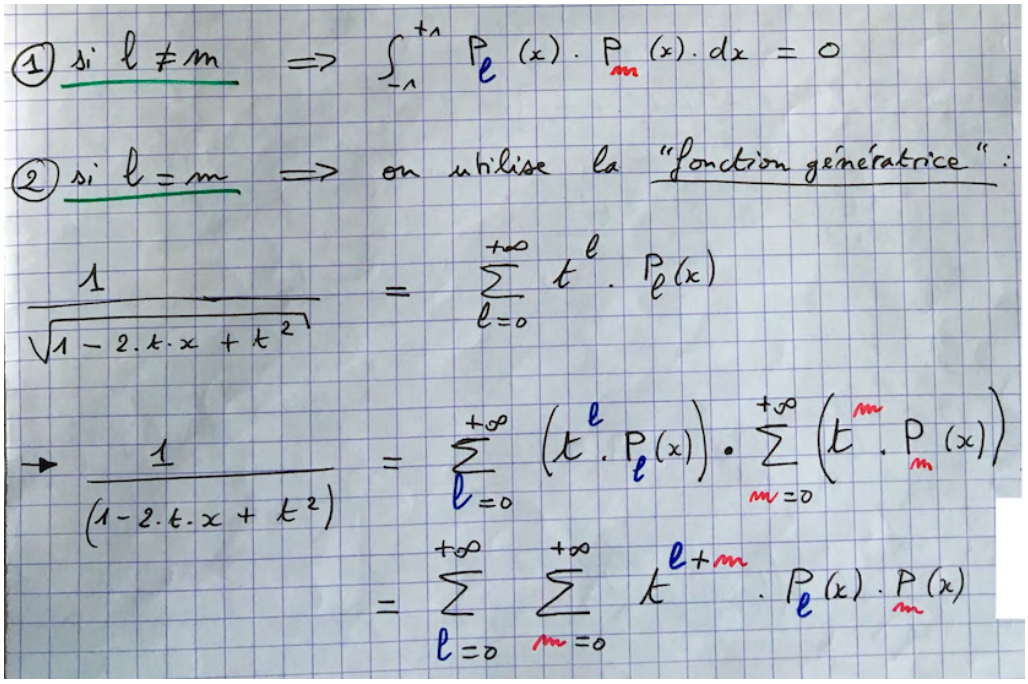
Remarques. Le terme de gauche de la formule précédente représente le produit scalaire entre les polynômes $P_\ell(x)$ et $P_m(x)$. Le terme de droite contient le symbole de Kronecker (zéro ou un). Donc, si les deux polynômes sont de degrés différents ($\ell \neq m$), leur produit scalaire est nul (donc ils sont considérés comme orthogonaux). On voit aussi que la norme au carré d'un polynôme de Legendre, $P_\ell(x)$, c'est-à-dire le produit scalaire d'un polynôme avec lui même, $\int_{-1}^{1} (P_\ell(x))^2 \, dx$ n'ait pas égale à un (mais à $\frac{2}{2\ell+1}$). Les polynômes de Legendre sont donc orthogonaux mais pas orthonormaux.

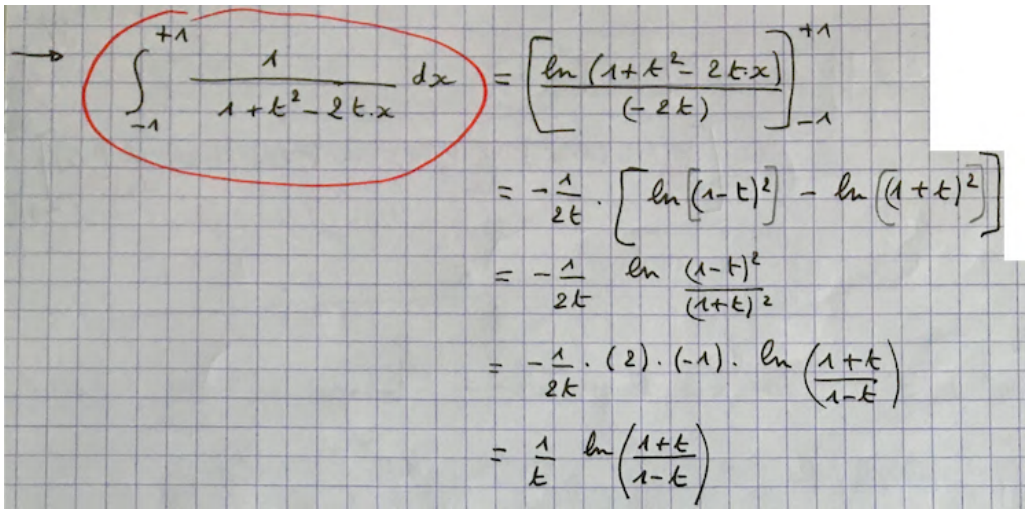
Démo (de la formule précédente).

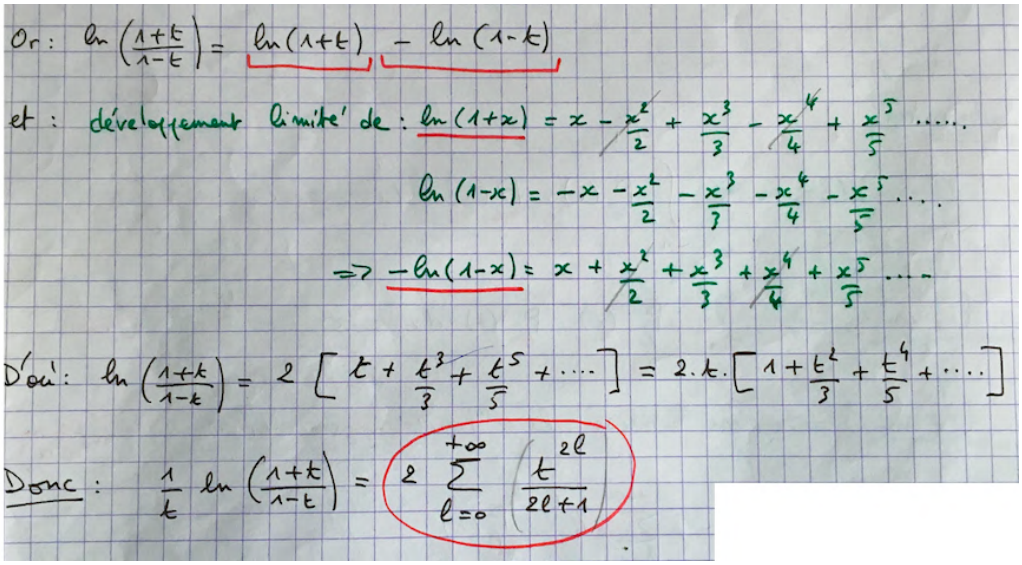


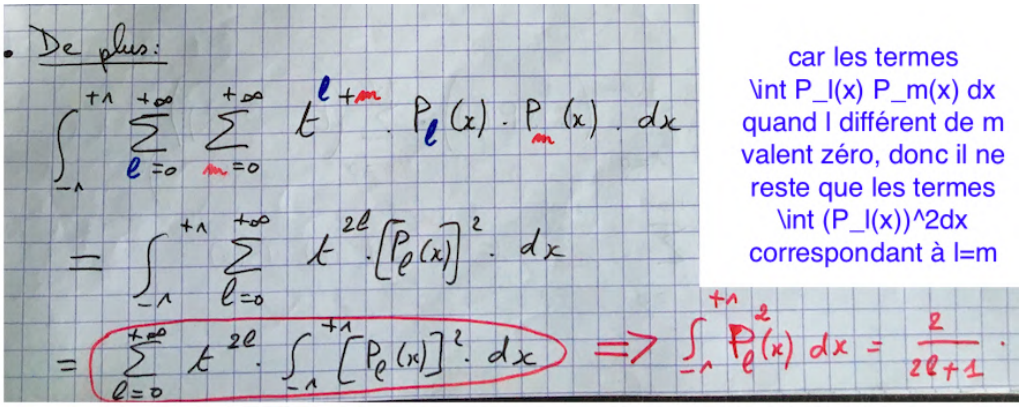

(*) $\frac{d}{dx}\left[P_m(x)\cdot(1-x^2)\cdot\frac{d}{dx}P_\ell(x)\right] = P_m(x)\cdot\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_\ell(x)\right] + \frac{d}{dx}\left[P_m(x)\right]\cdot(1-x^2)\frac{d}{dx}P_\ell(x)$
« terme cherché »
(**) "idem"
d'où : $\int_{-1}^{+1}\{\dots\}\,dx = \int_{-1}^{+1}\left\{\frac{d}{dx}\left[P_m(x)\cdot(1-x^2)\cdot\frac{d}{dx}P_\ell(x) - P_\ell(x)\cdot(1-x^2)\cdot\frac{d}{dx}P_m(x)\right]\right.$
$\left. - \frac{d}{dx}\left[P_m(x)\right]\cdot(1-x^2)\cdot\frac{d}{dx}\left[P_\ell(x)\right] + \frac{d}{dx}\left[P_\ell(x)\right]\cdot(1-x^2)\cdot\frac{d}{dx}\left[P_m(x)\right]\right\}dx$


d'où : $\int_{-1}^{1}\left\{\frac{d}{dx}[\dots]\right\}dx = [\dots]_{-1}^{1}$
$= \left[P_m(x)\cdot(1-x^2)\cdot\frac{d}{dx}P_\ell(x) - P_\ell(x)\cdot(1-x^2)\cdot\frac{d}{dx}P_m(x)\right]_{-1}^{1}$
Or : $(1-x^2) = 0$, si $x = 1$ ou $x = -1$!
$\Rightarrow \int_{-1}^{1}\left\{\frac{d}{dx}[\dots]\right\}dx = 0$
Finalement :
$(\ell-m)(\ell+m+1)\int_{-1}^{+1} P_\ell(x)\cdot P_m(x)\cdot dx = 0$


① si $\ell \neq m$ $\Rightarrow$ $\int_{-1}^{+1} P_\ell(x) \cdot P_m(x) \cdot dx = 0$
② si $\ell = m$ $\Rightarrow$ on utilise la "fonction génératrice" :
$\frac{1}{\sqrt{1-2.t.x+t^2}} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} t^\ell \cdot P_\ell(x)$
$\rightarrow \frac{1}{(1-2.t.x+t^2)} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left(t^\ell \cdot P_\ell(x)\right) \cdot \sum_{m=0}^{+\infty} \left(t^m \cdot P_m(x)\right)$
$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} t^{\ell+m} \cdot P_\ell(x) \cdot P_m(x)$

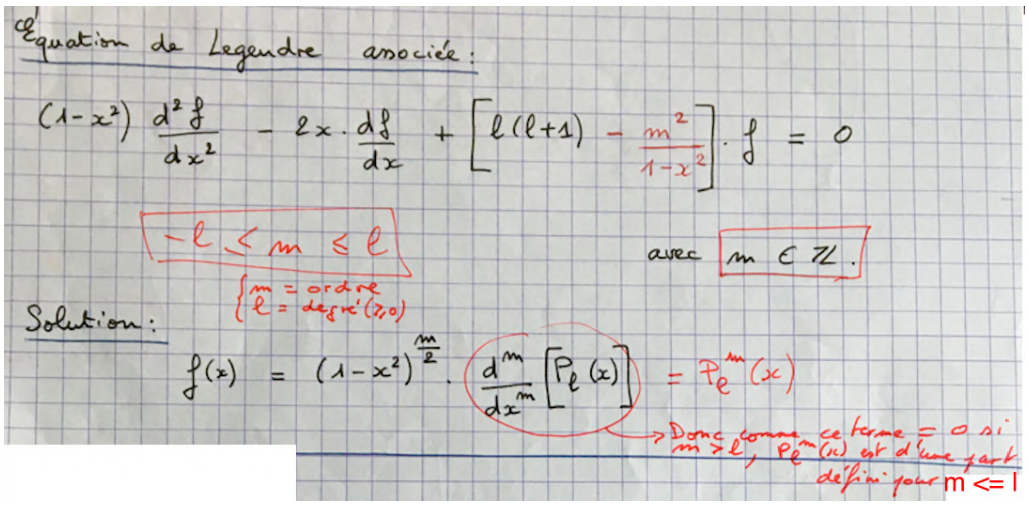

$\rightarrow \int_{-1}^{+1} \frac{1}{1+t^2-2t.x} dx = \left[\frac{\ln(1+t^2-2t.x)}{(-2t)}\right]_{-1}^{+1}$
$= -\frac{1}{2t} \cdot \left[\ln\left[(1-t)^2\right] - \ln\left[(1+t)^2\right]\right]$
$= -\frac{1}{2t} \ln \frac{(1-t)^2}{(1+t)^2}$
$= -\frac{1}{2t} \cdot (2) \cdot (-1) \cdot \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$
$= \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$

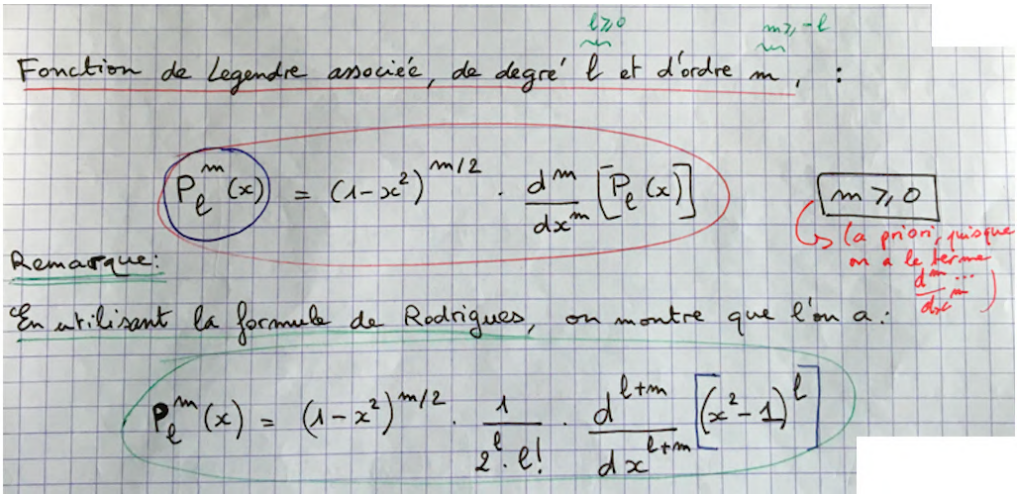


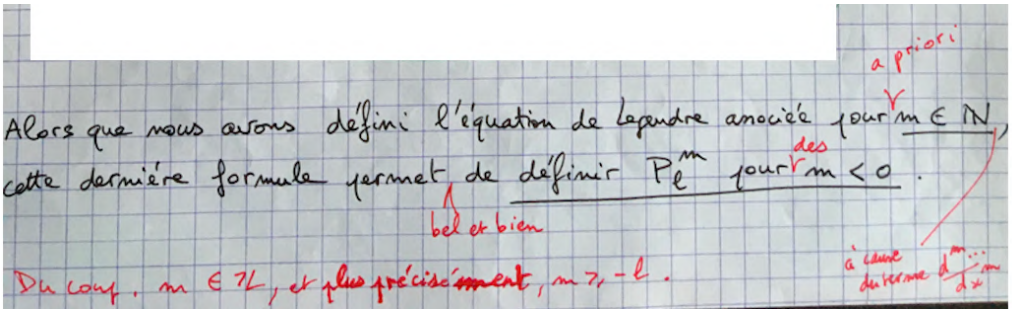


car les termes \int P_l(x) P_m(x) dx quand l différent de m valent zéro, donc il ne reste que les termes \int (P_l(x))^2dx correspondant à l=m

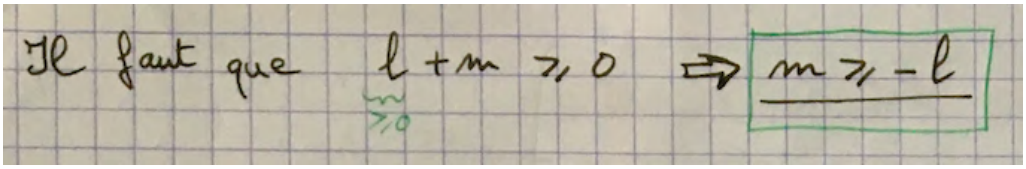
Equation de Legendre associée ⇒ Fonctions de Legendre associés $P_\ell^m(x)$, avec les entiers ℓ et m, avec $\ell \geq 0$ et $-\ell \leq m \leq \ell$, et avec la variable réelle $x \in [-1;1]$. Les fonctions de Legendre associées $P_\ell^m(x)$ sont des polynômes (appelés polynômes de Legendre associés) quand l'entier m est pair (à cause du terme $(1-x^2)^{m/2}$ dans la formule $P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_\ell(x)}{dx^m}$). Néanmoins, en général — et aussi dans ce cours — on parle de polynômes de Legendre associés même quand m est impair.



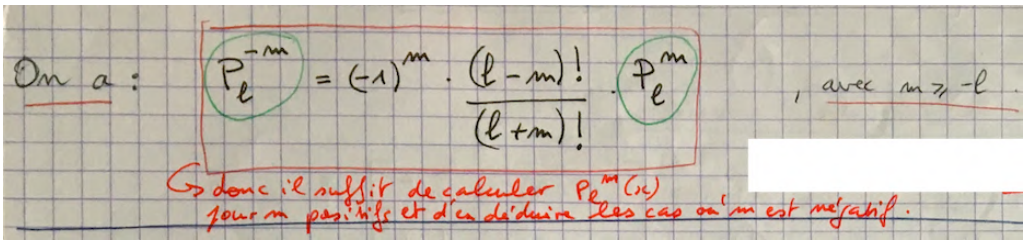




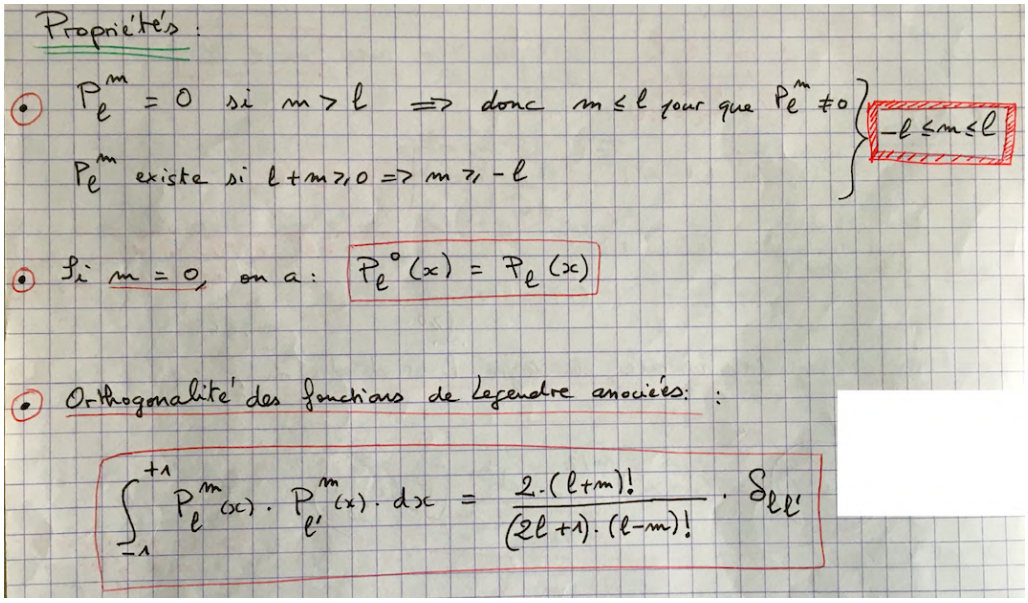
En effet, dans la formule précédente ($P_\ell^m(x) = \cdots$) on a une dérivée d'ordre $(\ell + m)$, donc il faut que $\ell + m \geq 0$, et d'où $m \geq -\ell$, comme rappelé ci-dessous.

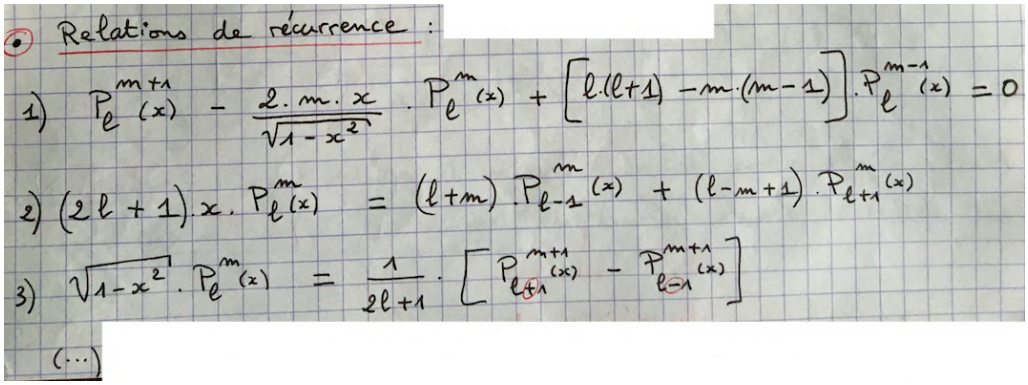


Formule utile (pour calculer facilement P_ℓ^{-m} à partir de P_ℓ^m).

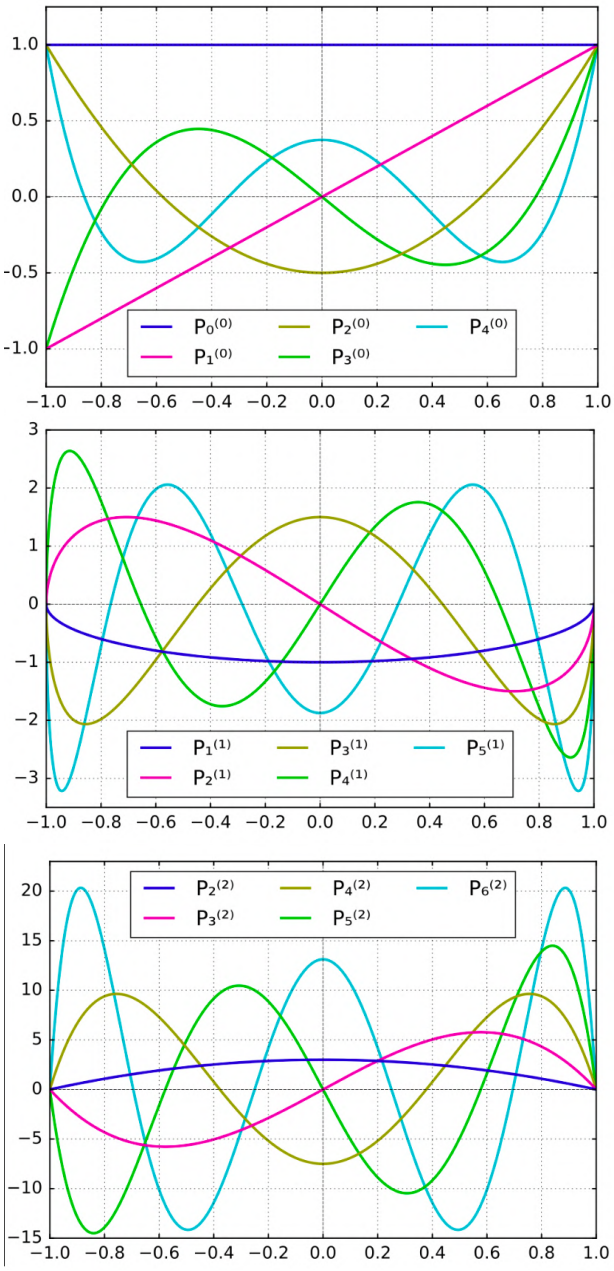


Quelques remarques/propriétés.



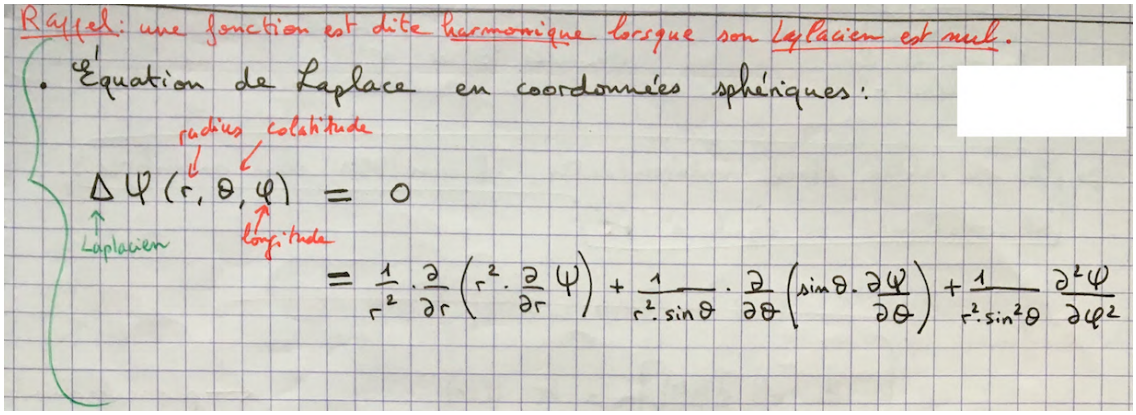


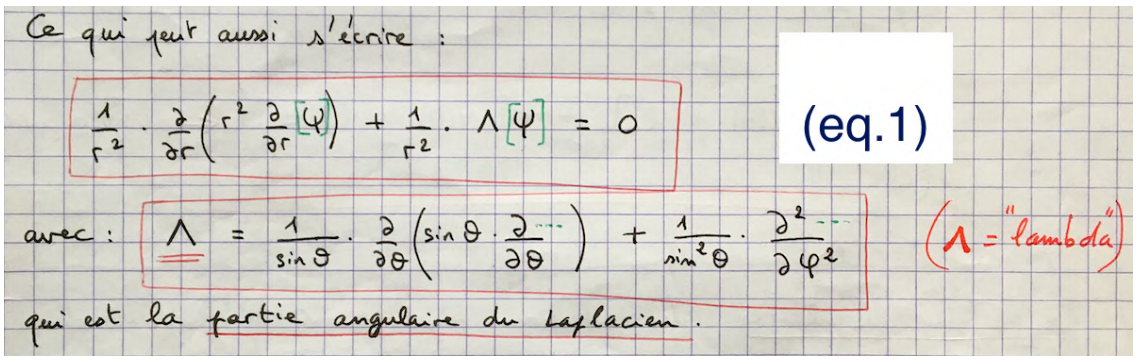
Exemple de "polynômes" de Legendre associés $P_\ell^m(x)$ pour un degré $\ell = 0, 1, 2, 3, 4$ et un ordre : [1ère ligne] $m = 0$ (dans ce cas on retrouve les polynômes de Legendre $P_\ell(x)$), [2ème ligne] $m = 1$, [3ème ligne] $m = 2$ (d'après Wiki).

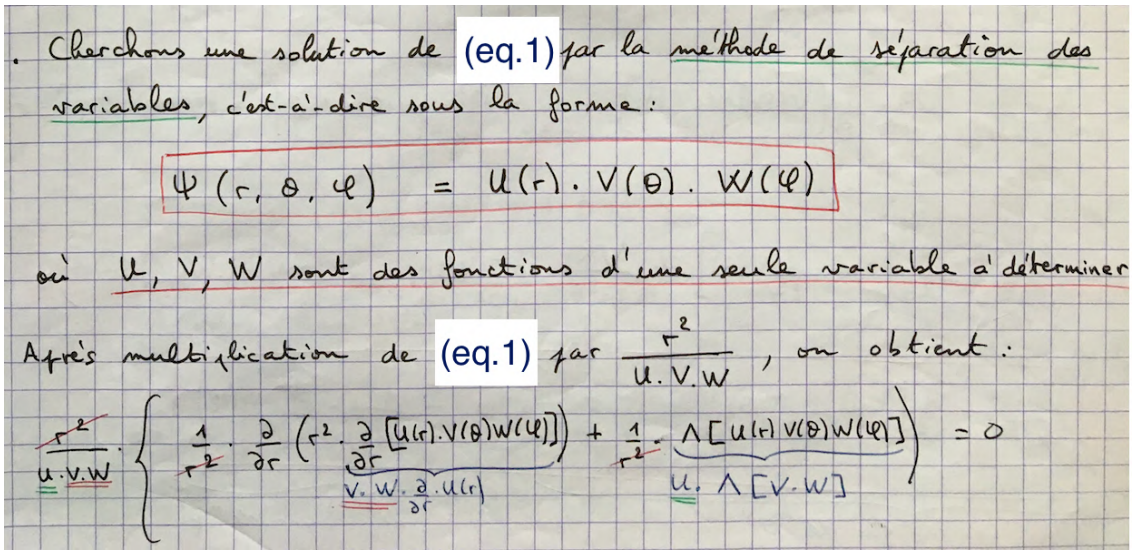


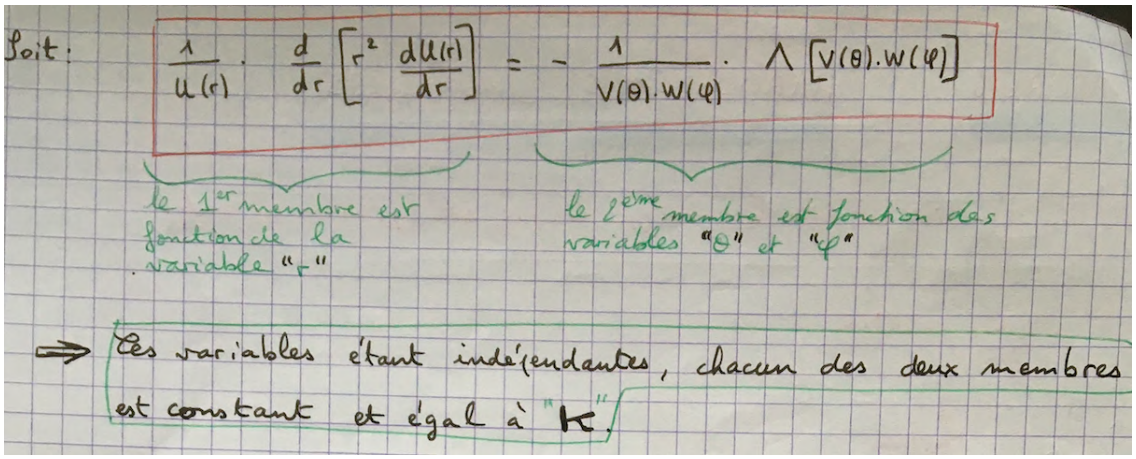
Chapter 9

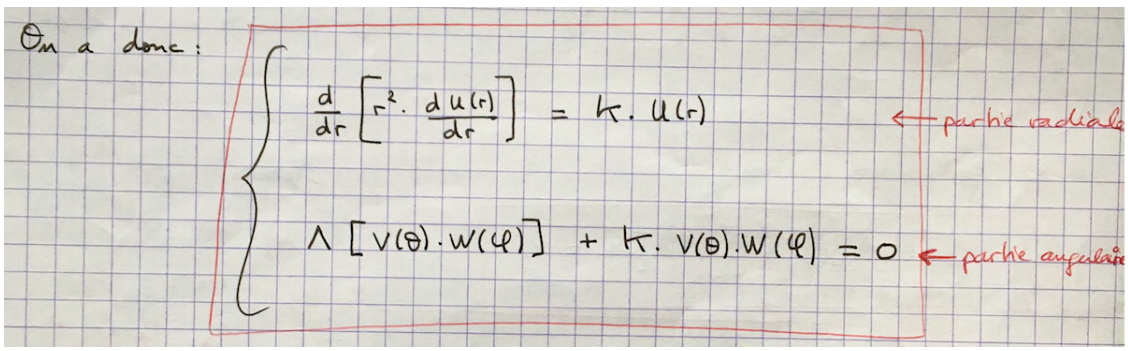
Harmoniques Sphériques

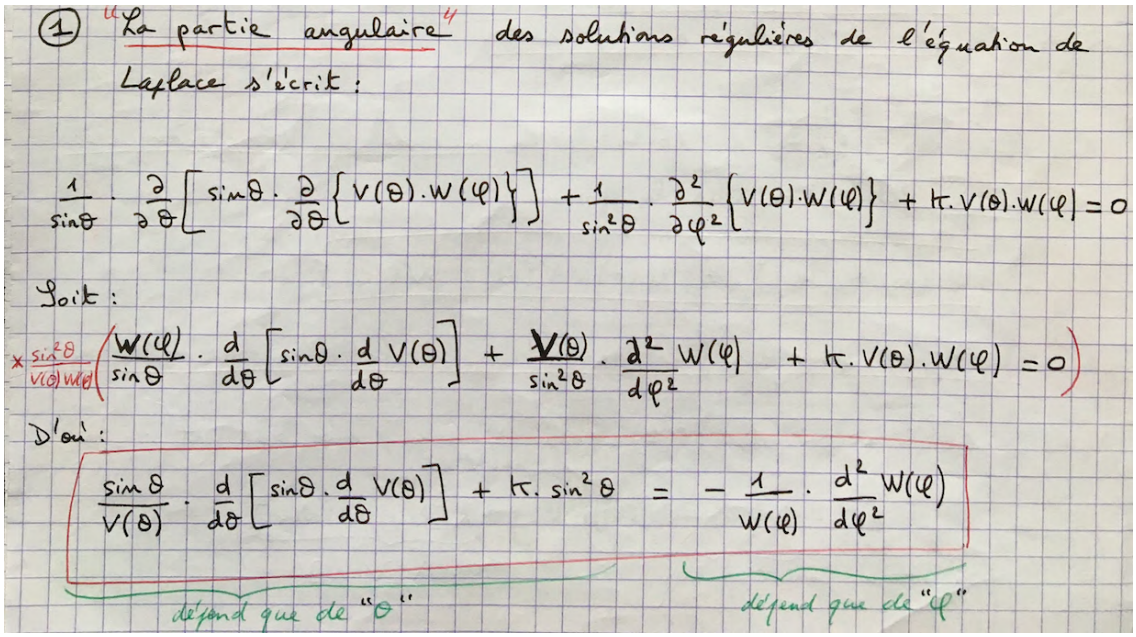


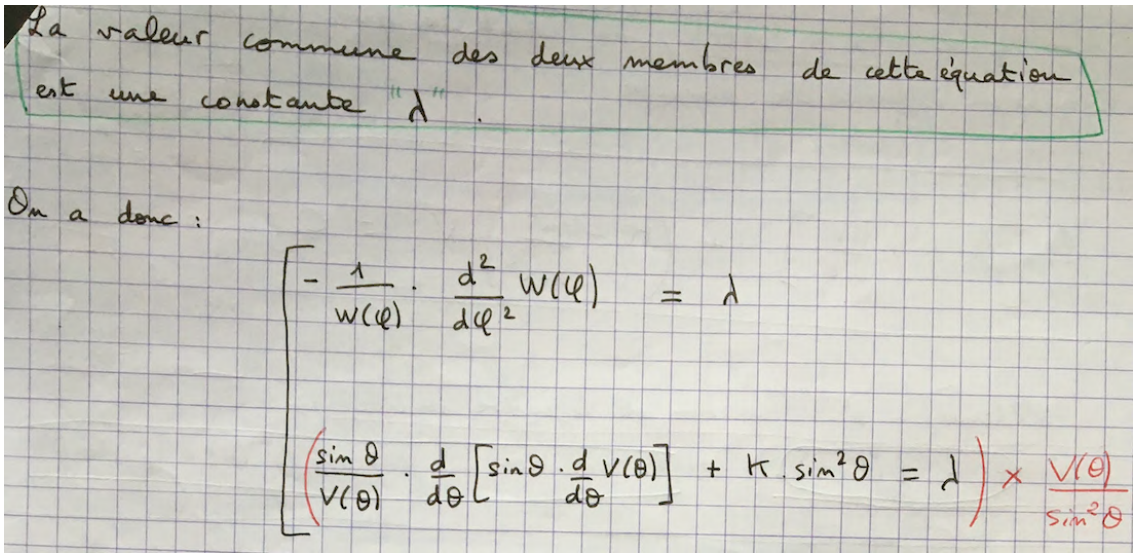



. Cherchons une solution de (eq.1) par la méthode de séparation des variables, c'est-à-dire sous la forme :
$\Psi(r,\theta,\varphi) = U(r).V(\theta).W(\varphi)$
où U, V, W sont des fonctions d'une seule variable à déterminer
Après multiplication de (eq.1) par $\frac{r^2}{U.V.W}$, on obtient :
$\frac{r^2}{U.V.W}\cdot\left\{\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{\partial}{\partial r}[U(r).V(\theta)W(\varphi)]\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\Lambda[U(r)V(\theta)W(\varphi)]\right)=0$
$V.W.\frac{\partial}{\partial r}U(r)$
$U.\Lambda[V.W]$


Soit :
$\frac{1}{U(r)}\cdot\frac{d}{dr}\left[r^2\frac{dU(r)}{dr}\right]=-\frac{1}{V(\theta).W(\varphi)}\cdot\Lambda[V(\theta).W(\varphi)]$
le 1er membre est fonction de la variable "r"
le 2ème membre est fonction des variables "θ" et "φ"
⇒ Ces variables étant indépendantes, chacun des deux membres est constant et égal à "K".


On a donc :
$\frac{d}{dr}\left[r^2.\frac{dU(r)}{dr}\right]=K.U(r)$ ← partie radiale
$\Lambda[V(\theta).W(\varphi)]+K.V(\theta).W(\varphi)=0$ ← partie angulaire


① "La partie angulaire" des solutions régulières de l'équation de Laplace s'écrit :
$\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\{V(\theta).W(\varphi)\}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\{V(\theta).W(\varphi)\}+k.V(\theta).W(\varphi)=0$
Soit :
$\times\frac{\sin^2\theta}{V(\theta)W(\varphi)}\left(\frac{W(\varphi)}{\sin\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\cdot\frac{d}{d\theta}V(\theta)\right]+\frac{V(\theta)}{\sin^2\theta}\cdot\frac{d^2}{d\varphi^2}W(\varphi)+k.V(\theta).W(\varphi)=0\right)$
D'où :
$\frac{\sin\theta}{V(\theta)}\cdot\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta.\frac{d}{d\theta}V(\theta)\right]+k.\sin^2\theta=-\frac{1}{W(\varphi)}\cdot\frac{d^2}{d\varphi^2}W(\varphi)$
dépend que de "θ"
dépend que de "φ"


La valeur commune des deux membres de cette équation est une constante "λ".
On a donc :
$-\frac{1}{W(\varphi)}\cdot\frac{d^2}{d\varphi^2}W(\varphi)=\lambda$
$\left(\frac{\sin\theta}{V(\theta)}\cdot\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\cdot\frac{d}{d\theta}V(\theta)\right]+k.\sin^2\theta=\lambda\right)\times\frac{V(\theta)}{\sin^2\theta}$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{cases} -\frac{1}{W(\varphi)} \cdot \frac{d^2}{d\varphi^2} W(\varphi) = \lambda \\ \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta \cdot \frac{d}{d\theta} V(\theta)\right] + \left(K - \frac{\lambda}{\sin^2\theta}\right) \cdot V(\theta) = 0 \end{cases}$$

Seules les solutions uniformes sur la sphère nous intéressent :

Une solution de l'équa diff est $W(\varphi) = Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi}$ avec $m^2 = \lambda$ et dans ce cas, il faut que m soit un entier pour que $W(\varphi) = W(\varphi + 2\pi)$

$$W(\varphi) = W(\varphi + 2\pi)$$

$$\lambda = m^2$$

$\Rightarrow$ λ doit donc être le carré, m^2, d'un nombre entier.

On a alors : $W(\varphi) = A \cdot e^{i.m.\varphi} + B \cdot e^{-i.m.\varphi}$

(vérifie bien $W(\varphi + 2\pi) = A(e^{im\varphi} * e^{im2\pi}) + B(e^{-im\varphi} * e^{-im2\pi}) = W(\varphi)$, car si m est un entier $e^{im2\pi} = e^{-im2\pi} = 1$)

(rq : à vérifier par le calcul $\rightarrow$ $-\frac{W''}{W} = \frac{m^2(Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi})}{Ae^{im\varphi} + Be^{-im\varphi}} = m^2 = \lambda$)

Si l'on pose $\boxed{x = \cos\theta}$, on constate que V est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dV}{dx}\right] + \left(K - \frac{m^2}{1-x^2}\right).V = 0$$

Il faut écrire :
$\sin\theta = \sqrt{1-x^2}$
$d\theta = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
(car $x = \cos\theta$
$\Rightarrow dx = -\sin\theta\, d\theta$
$= -\sqrt{1-x^2}\, d\theta$)

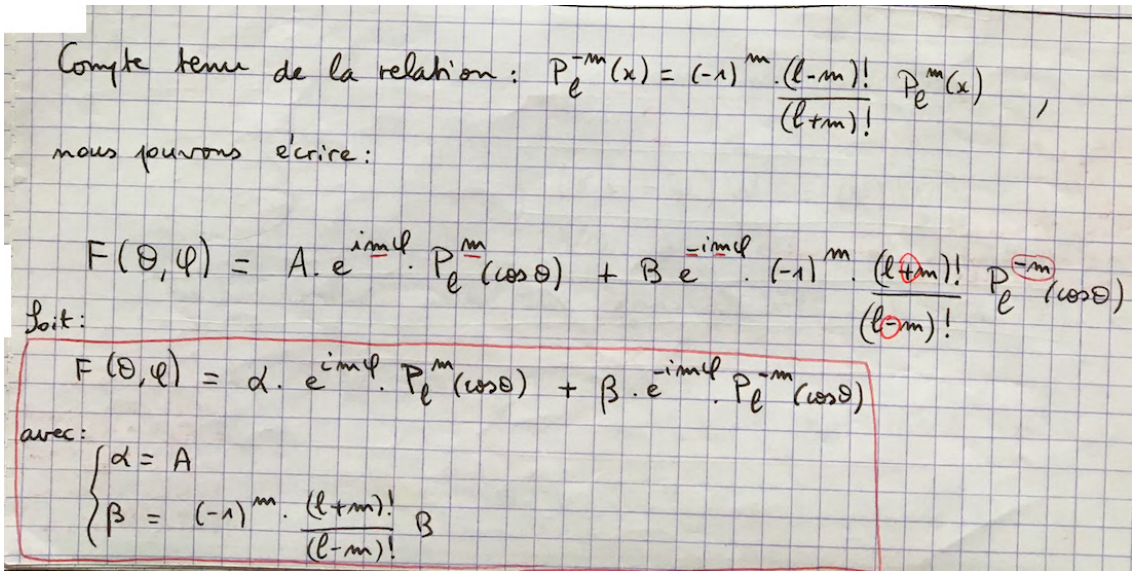
↳ qui s'identifie à "l'équation de Legendre associée" (1.9)
pour $K = \ell(\ell+1)$. $\Rightarrow$ la solution est donc $P_\ell^m(x) = P_\ell^m(\cos\theta)$.

Ainsi, les fonctions :

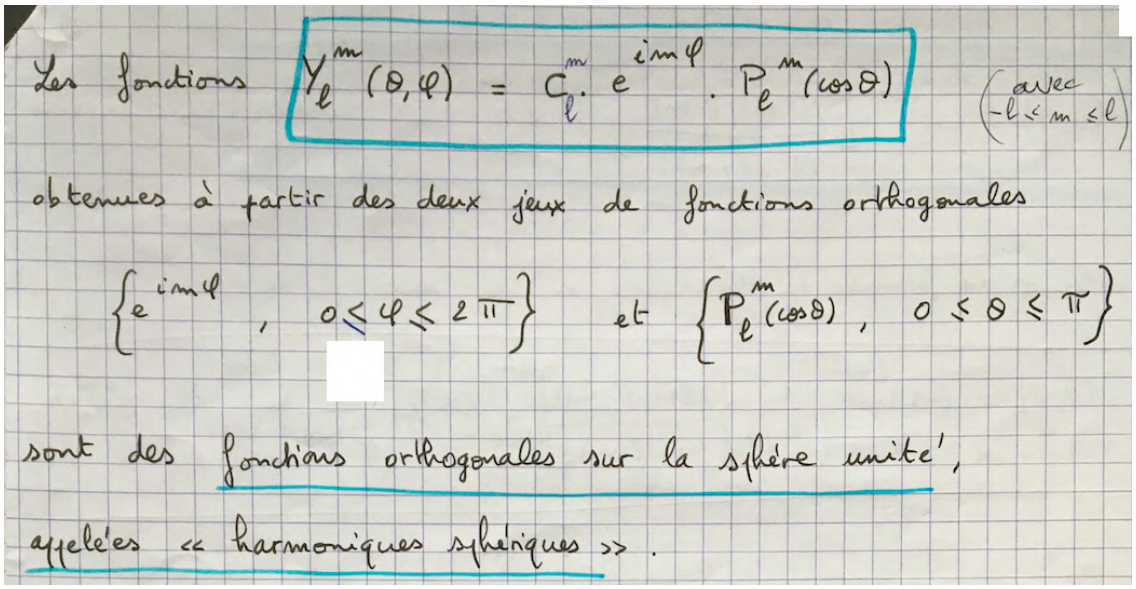
$$F(\theta,\varphi) = \underbrace{\left(A.e^{im\varphi} + B.e^{-im\varphi}\right)}_{W(\varphi)} . \underbrace{P_\ell^m(\cos\theta)}_{V(\theta)}$$

sont les solutions uniformes de l'équation :

$$\Lambda[F] + \underbrace{\ell(\ell+1)}_{K}.F = 0 \qquad \text{(partie angulaire)}$$

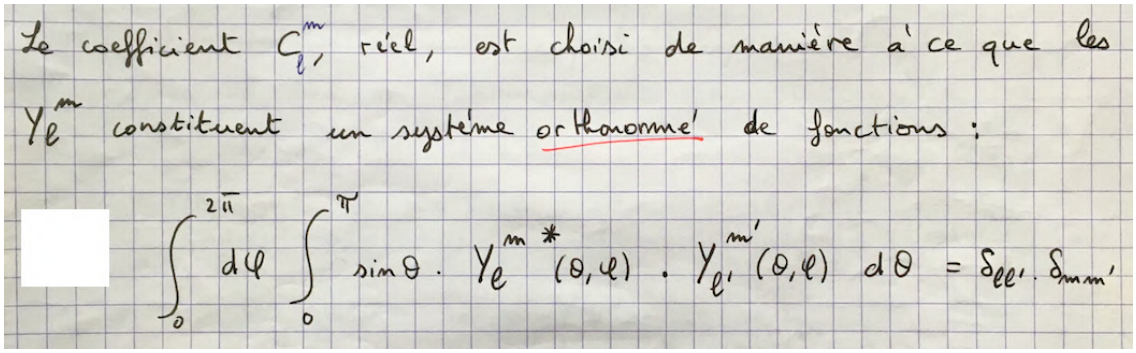


On voit donc que les fonctions $F(\theta, \varphi)$ peuvent s'écrire 'en gros' comme un coefficient (qu'on note c_ℓ^m, qui dépend de ℓ et m) multiplié par le produit des fonctions $e^{im\varphi}$ et $P_\ell^m(\cos\theta)$ — avec $P_\ell^m(\cos\theta)$ le polynôme de Legendre Associé pris en $\cos\theta$ (ce qui est possible puisque $P_\ell^m(x)$ est défini pour $|x| \leq 1$, et que $|\cos\theta| \leq 1$). On note que ℓ est appelé le degré (entier naturel), et m l'ordre (entier relatif, avec $-\ell \leq m \leq \ell$). Au final, chaque terme $Y_\ell^m(\theta, \varphi) = c_\ell^m e^{im\varphi} P_\ell^m(\cos\theta)$ est ce qu'on appelle dans le jargon une *harmonique sphérique*.

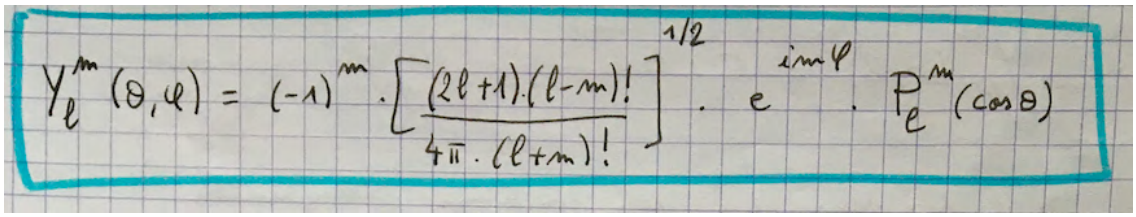


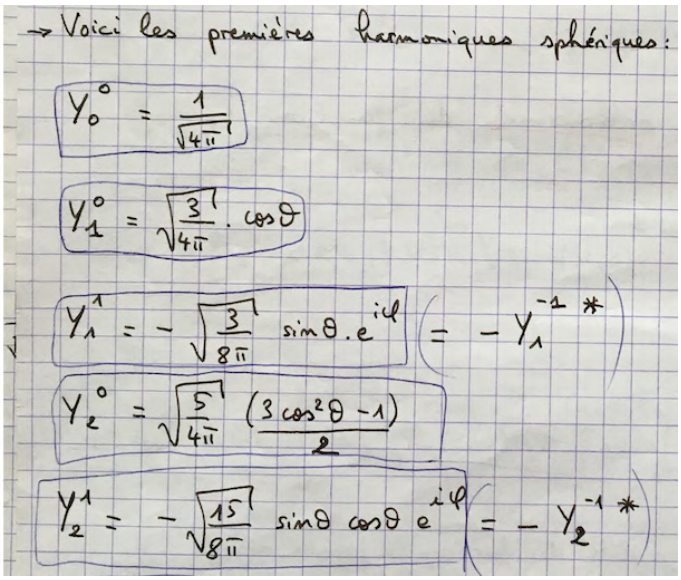
De manière plus rigoureuse, on devrait appeler la fonction $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ une *harmonique sphérique surfacique* (i.e. définie à la surface d'une sphère), car le terme *harmonique sphérique*

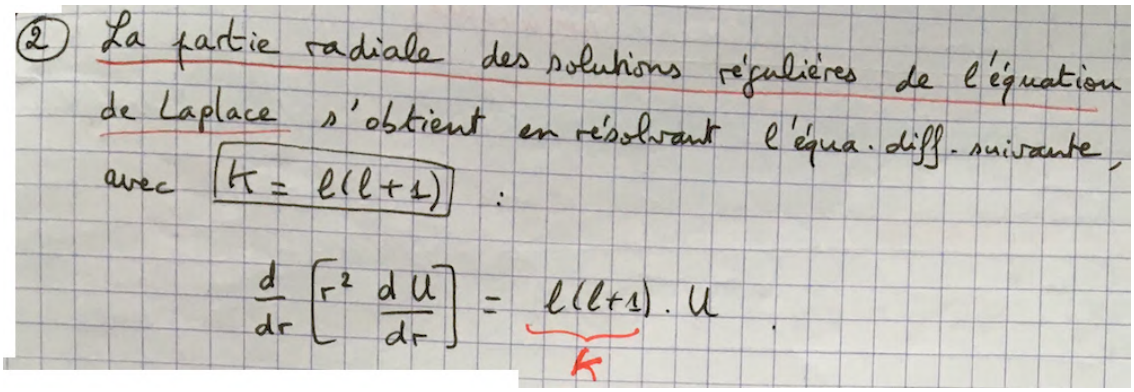
devrait être réservé pour les solutions complètes (i.e. parties angulaire et radiale de l'équation de Laplace en sphériques). Néanmoins, il est très très courant de faire l'abus de language d'appeler directement les fonctions $Y_\ell^m(\theta,\varphi)$ (qui sont solutions de la partie angulaire de l'équation de Laplace en sphériques) les harmoniques sphériques !

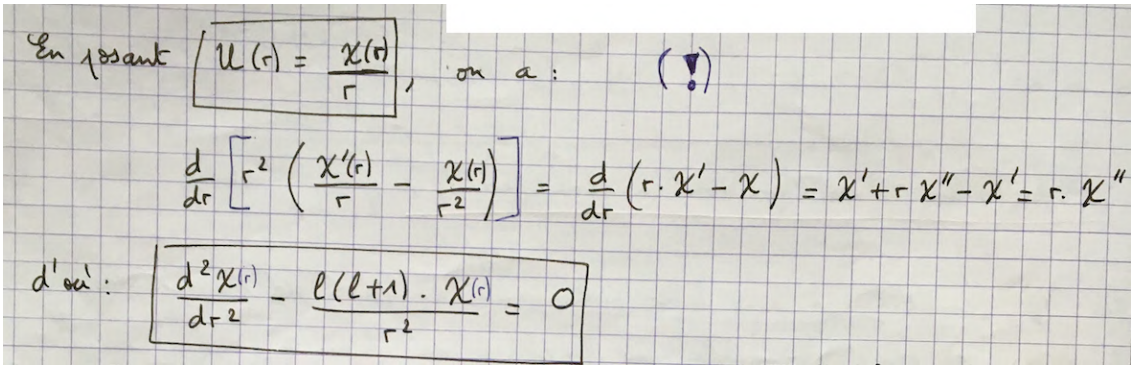


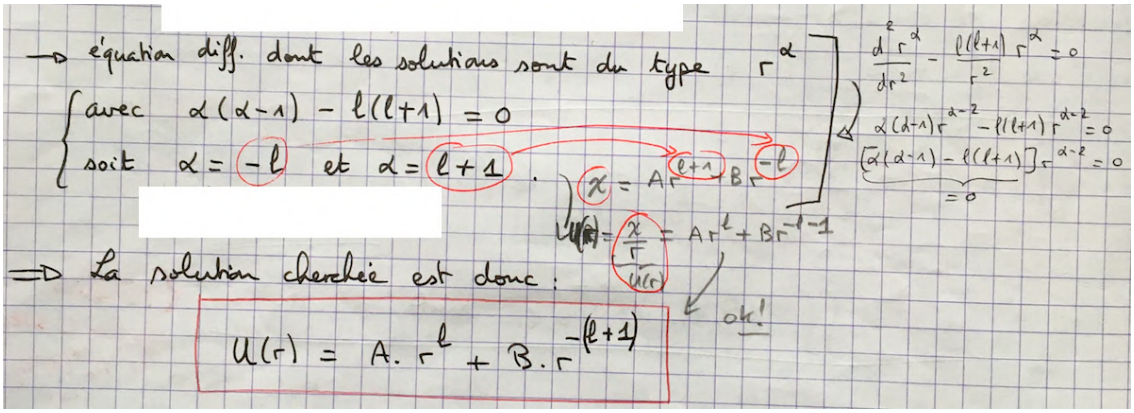
Nous déterminerons l'expression des coefficients c_ℓ^m dans le TD10 (voir vidéo) correspondant à ce cours. Remarque : par convention le signe de c_ℓ^m est pris égal à $(-1)^m$.

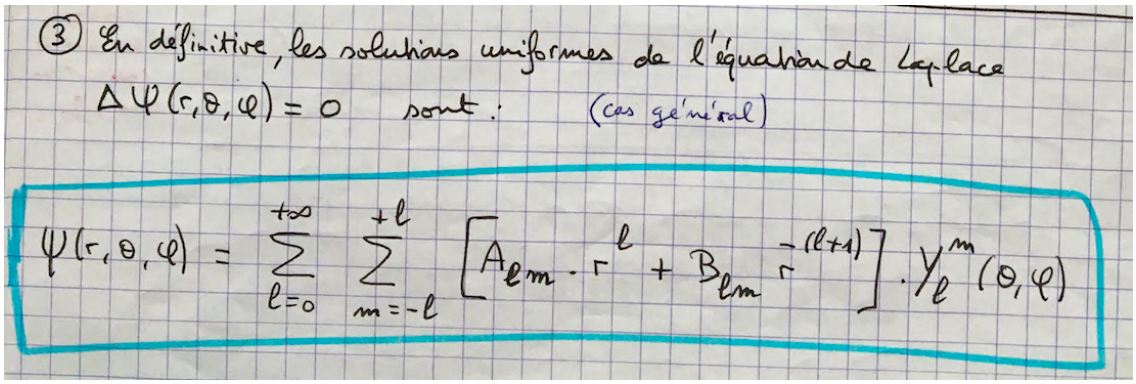





② La partie radiale des solutions régulières de l'équation de Laplace s'obtient en résolvant l'équa. diff. suivante, avec $k = \ell(\ell+1)$:
$\frac{d}{dr}\left[r^2 \frac{dU}{dr}\right] = \underbrace{\ell(\ell+1)}_{k} \cdot U$.

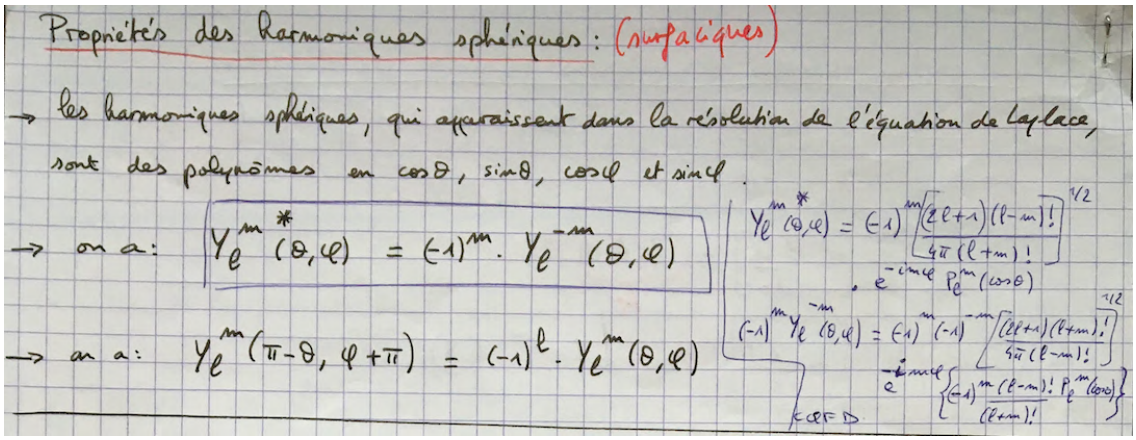

En posant $U(r) = \frac{\chi(r)}{r}$, on a : (!)
$\frac{d}{dr}\left[r^2\left(\frac{\chi'(r)}{r} - \frac{\chi(r)}{r^2}\right)\right] = \frac{d}{dr}\left(r\cdot\chi' - \chi\right) = \chi' + r\chi'' - \chi' = r\cdot\chi''$
d'où : $\frac{d^2\chi(r)}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)\cdot\chi(r)}{r^2} = 0$


→ équation diff. dont les solutions sont du type r^α
avec $\alpha(\alpha-1) - \ell(\ell+1) = 0$
soit $\alpha = -\ell$ et $\alpha = \ell+1$.
$\chi = Ar^{\ell+1} + Br^{-\ell}$
$U(r) = \frac{\chi}{r} = Ar^{\ell} + Br^{-\ell-1}$
$\frac{d^2 r^\alpha}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} r^\alpha = 0$
$\alpha(\alpha-1) r^{\alpha-2} - \ell(\ell+1) r^{\alpha-2} = 0$
$[\alpha(\alpha-1) - \ell(\ell+1)] r^{\alpha-2} = 0$
$= 0$
⇒ La solution cherchée est donc :
$U(r) = A \cdot r^{\ell} + B \cdot r^{-(\ell+1)}$
ok!



③ En définitive, les solutions uniformes de l'équation de Laplace $\Delta\psi(r,\theta,\varphi) = 0$ sont : (cas général)

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{+\ell} \left[A_{\ell m} \cdot r^{\ell} + B_{\ell m}\, r^{-(\ell+1)} \right] \cdot Y_\ell^m(\theta,\varphi)$$



Propriétés des harmoniques sphériques : (surfaciques)

→ les harmoniques sphériques, qui apparaissent dans la résolution de l'équation de Laplace, sont des polynômes en $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$.

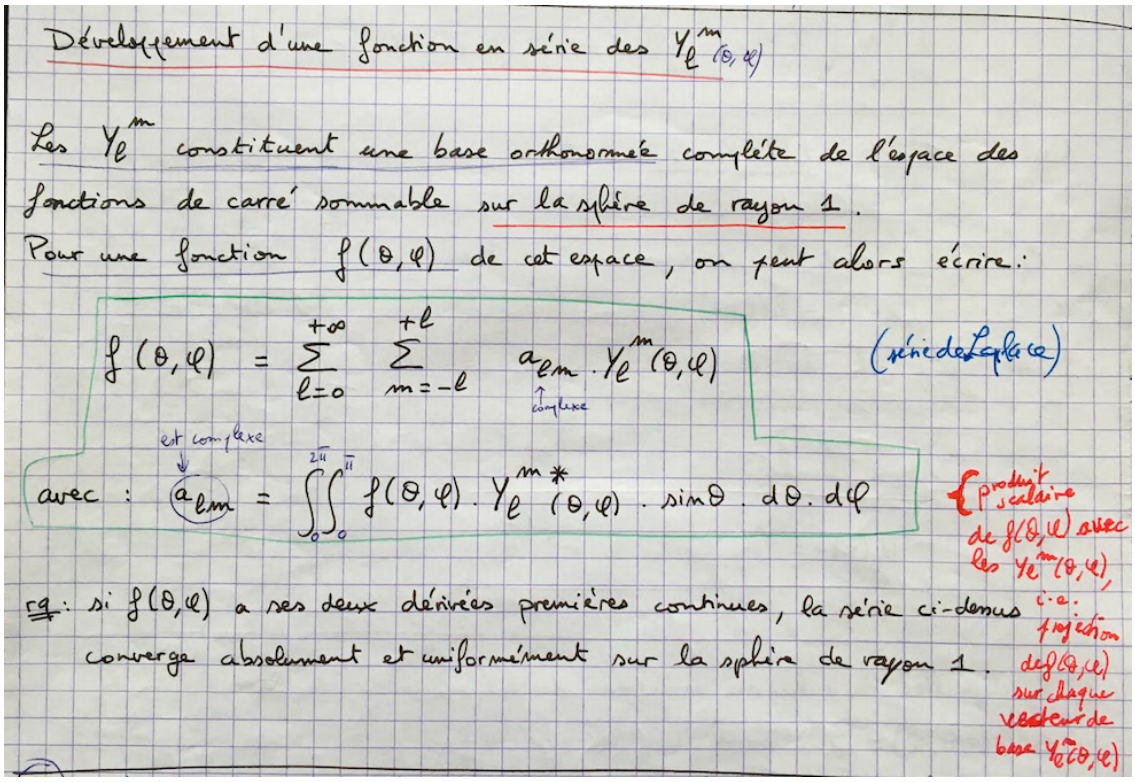
→ on a : $Y_\ell^{m\,*}(\theta,\varphi) = (-1)^m \cdot Y_\ell^{-m}(\theta,\varphi)$

→ on a : $Y_\ell^m(\pi-\theta, \varphi+\pi) = (-1)^\ell \cdot Y_\ell^m(\theta,\varphi)$

$$Y_\ell^{m\,*}(\theta,\varphi) = (-1)^m \left[\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!} \right]^{1/2} \cdot e^{-im\varphi} P_\ell^m(\cos\theta)$$

$$(-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta,\varphi) = (-1)^m (-1)^{-m} \left[\frac{(2\ell+1)(\ell+m)!}{4\pi(\ell-m)!} \right]^{1/2} e^{-im\varphi} \left\{ (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m(\cos\theta) \right\}$$

CQFD



Nous verrons un exemple de développement d'une fonction, $f(\theta, \varphi)$, en série de Laplace dans le TD10 (voir vidéo).