MATHEMATIQUES - 1A - EOST - 2023/2024 - C. Zaroli

TD 7 (new, oct. 2023) : Courbe brachistochrone & Free fall

—Euler-Lagrange, Beltrami—

1. **Rappels sur l'équation d'Euler-Lagrange et l'identité de Beltrami**

   L'équation d'Euler-Lagrange (E-L) joue un rôle clé dans les problèmes de minimisation de distance, tels que pour les problèmes de géodésiques — en particulier celui de la brachistochrone.

   Le problème d'E-L (cas 1D) consiste à trouver une fonction f qui rende extrémale (qui minimise ou maximise, en fonction du contexte) la fonctionnelle $J = \int_a^b \mathcal{L}(x, f(x), \dot{f}(x))dx$, sous la contrainte de vérifier les conditions aux bords $f(a) = A$ et $f(b) = B$, avec A et B des constantes, et $\mathcal{L}$ un Lagrangien (supposé deux fois continûment différentiable) qui dépend, *a priori*, de x, $f(x)$ et $\dot{f}(x) = \frac{d}{dx}f(x)$. La fonction f qu'on cherche est alors solution de *l'équation d'E-L* :

   $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}} = 0.$$

   La démonstration a été vue en cours.

   Soit un Lagrangien $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, f(x), \dot{f}(x))$. Si $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$, alors l'équation d'E-L devient :

   $$\mathcal{L} - \dot{f}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{f}} = \text{constante}$$

   — c'est *l'identité de Beltrami*. La démonstration a aussi été vue en cours.

2. **La courbe brachistochrone**

   Une brachistochrone désigne une trajectoire dans un plan vertical sur laquelle un point matériel pesant (bille de masse m), placé dans un champ de pesanteur uniforme, $\mathcal{G}$, glissant sans frottement et sans vitesse initiale, présente un temps de parcours minimal parmi toutes les trajectoires joignant deux positions fixées — c'est une *géodésique* au sens de la minimisation du temps de parcours ; voir Fig. 1.

   Soit un repère cartésien tel que (Ox) est horizontal et $x \geq 0$ vers la droite, et (Oy) est vertical et $y \geq 0$ vers le bas. Le point matériel est initialement en $(0, 0)$. On se propose de trouver les équations paramétriques de la trajectoire brachistochrone.

   Le déplacement infinitésimal ds le long d'une trajectoire s'écrit $ds = \sqrt{1 + \dot{y}^2}dx$, avec $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$; voir 2(b).

   Soit $v = \frac{ds}{dt}$ la vitesse du point matériel, avec t le temps. Le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire $v = \sqrt{2\mathcal{G}\Delta y}$, où $\Delta y = y - y_{\text{départ}}$ est la perte d'altitude du point matériel ($\Delta y = y$ car $y_{\text{départ}} = 0$).

   Le temps de parcours total du point matériel depuis la position de départ jusqu'à celle d'arrivée, le long d'une certaine trajectoire, est $T = \int_{\text{départ}}^{\text{arrivée}} dt$. La brachistochrone est donc la trajectoire minimisant T.

   (a) Montrer que $dt = \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{2\mathcal{G}y}}dx$. Le problème se ramène ainsi à minimiser $T = \int_{\text{départ}}^{\text{arrivée}} \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{2\mathcal{G}y}}dx$.

   (b) On veut trouver la trajectoire, c'est-à-dire la fonction $y(x)$, qui minimise

   $$T = \int_{\text{départ}}^{\text{arrivée}} \mathcal{L}(x, y(x), \dot{y}(x))dx$$

   avec le Lagrangien $\mathcal{L} = \sqrt{\frac{1+\dot{y}^2}{2\mathcal{G}y}}$.

   La trajectoire solution doit vérifier *l'identité de Beltrami* : pourquoi ?

(c) Montrer que la trajectoire solution doit satisfaire ($\bigstar$) : $(1+\dot{y}^2)y = D$, où D est une constante.

(d) Soit θ l'angle que fait la trajectoire avec la verticale. Un peu de trigonométrie permet de voir que $\dot{y} = \frac{dy}{dx} = \cot\theta$. Faisons le changement de variable $u = 2\theta$, et remarquons que $dx = dy\tan\theta$.

On souhaite résoudre ($\bigstar$), afin de trouver les équations paramétriques $x(u)$ et $y(u)$ de la brachistochrone.

i. Montrer que $y(u) = \frac{D}{2}(1 - \cos u)$.

ii. Montrer que $x(u) = \frac{D}{2}(u - \sin u)$.

iii. Que représente D ?

Au final, on obtient les équations paramétriques d'une *cycloïde*. La brachistochrone est donc un bout de cycloïde. On remarque sur la Fig. 1 que la dernière portion de la brachistochrone remonte vers le haut !

■ <u>Formule utile</u> : $\tan x = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$.

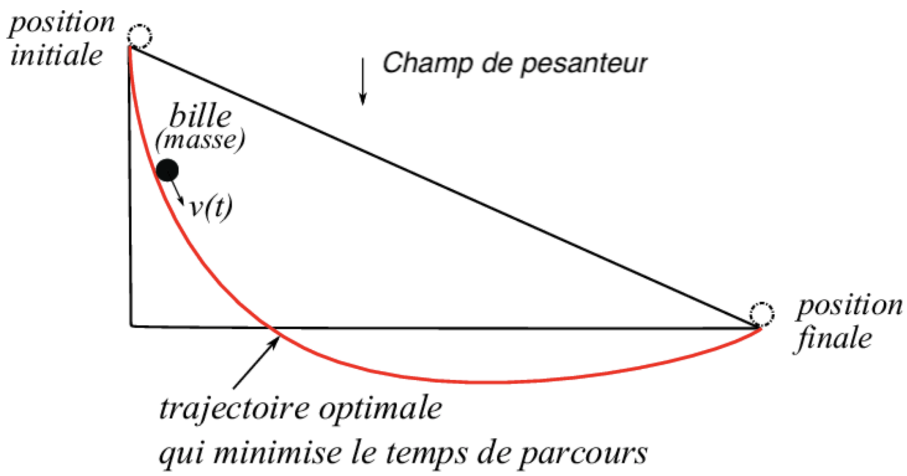

FIGURE 1 – Trajectoire brachistochrone de minimisation du temps de parcours. (Reinbold, PhD thesis, 2014).

3. **<u>Free fall</u>**
Décrire la trajectoire d'une bille de masse m qui est lâchée en chute libre (sans frottement), avec une vitesse v, dans un champ de pesanteur g. Ecrire d'abord le Lagrangien du problème : $\mathcal{L}$ = énergie cinétique − énergie potentielle. Puis résoudre l'équation d'E-L correspondante.