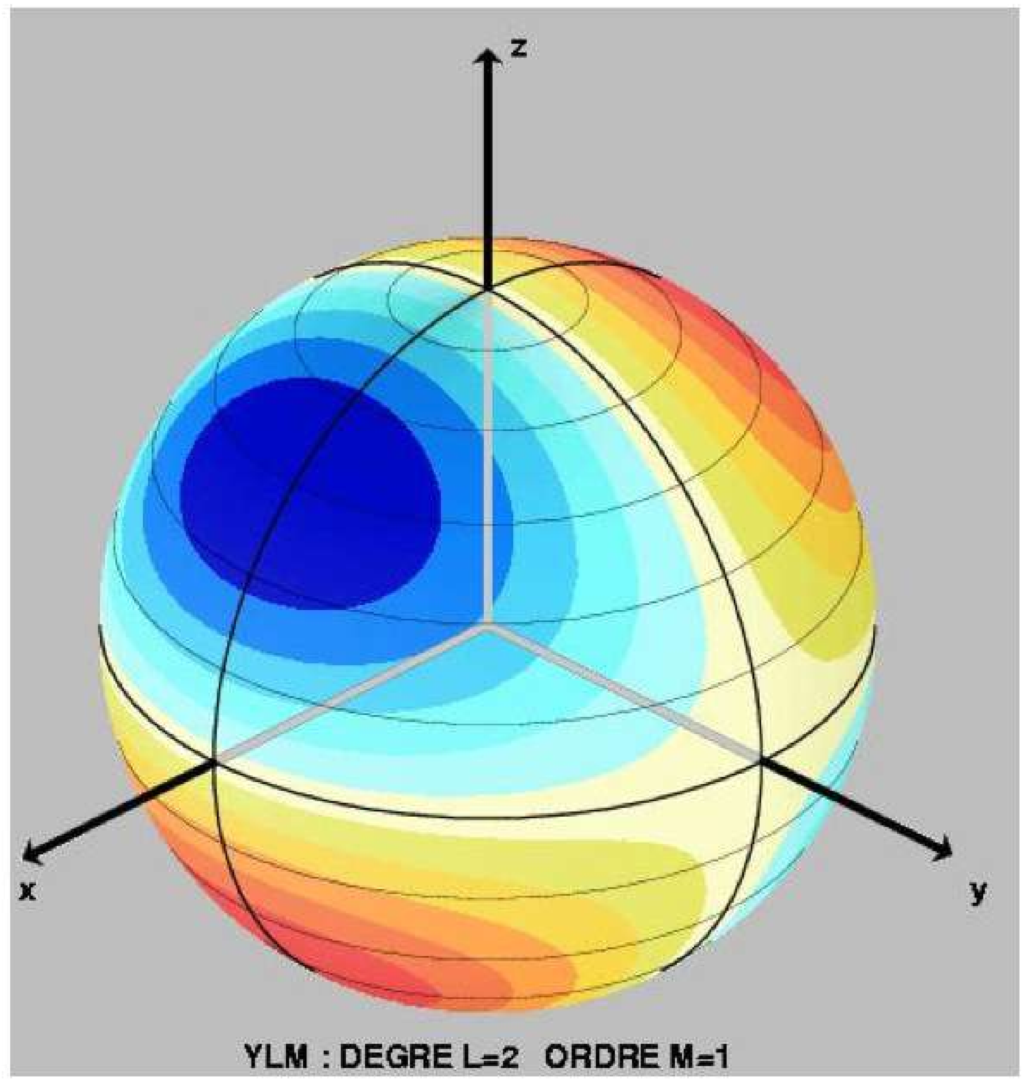
Harmoniques Sphériques :

quelques exemples d'utilisation en géophysique



Cours de Mathématiques - 1A EOST - 2013/2014

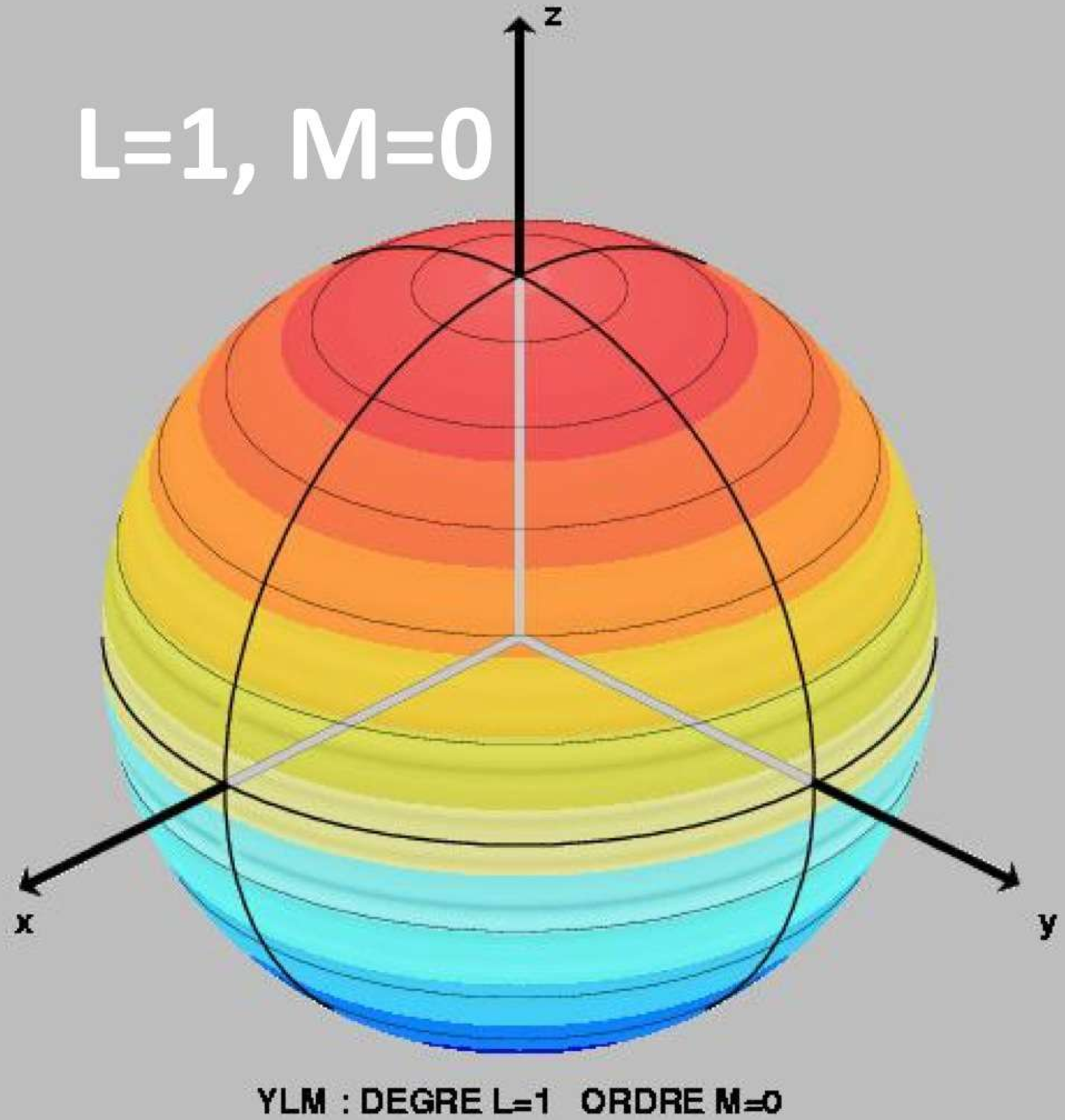
Christophe Zaroli

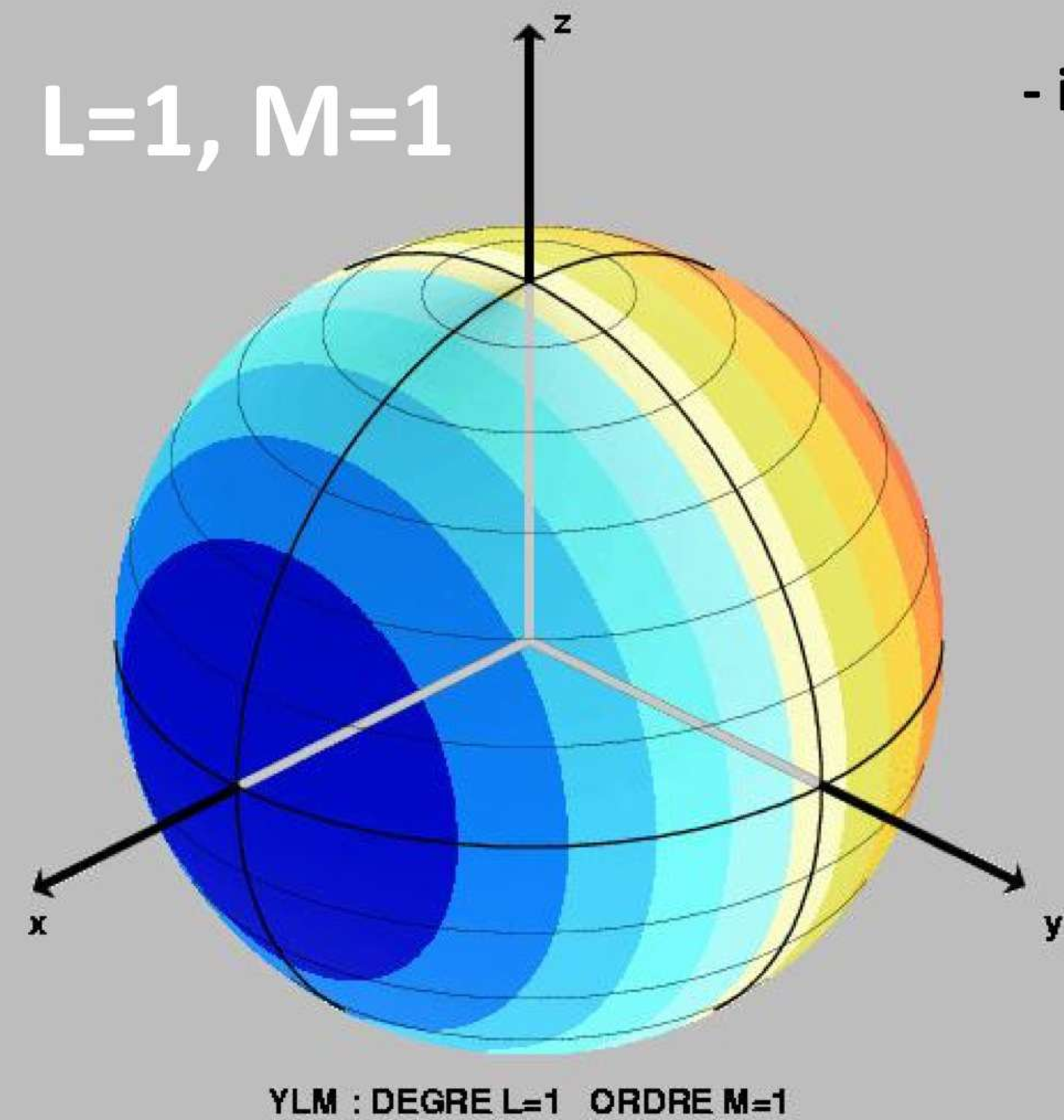
Les fonctions solutions de l'équation de Laplace sont donc finalement les harmoniques sphériques Y_l^m, qui s'écrivent donc :

$$Y_l^m(r,\theta,\varphi) = (C_l^m r^l + D_l^m r^{-(l+1)}) P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

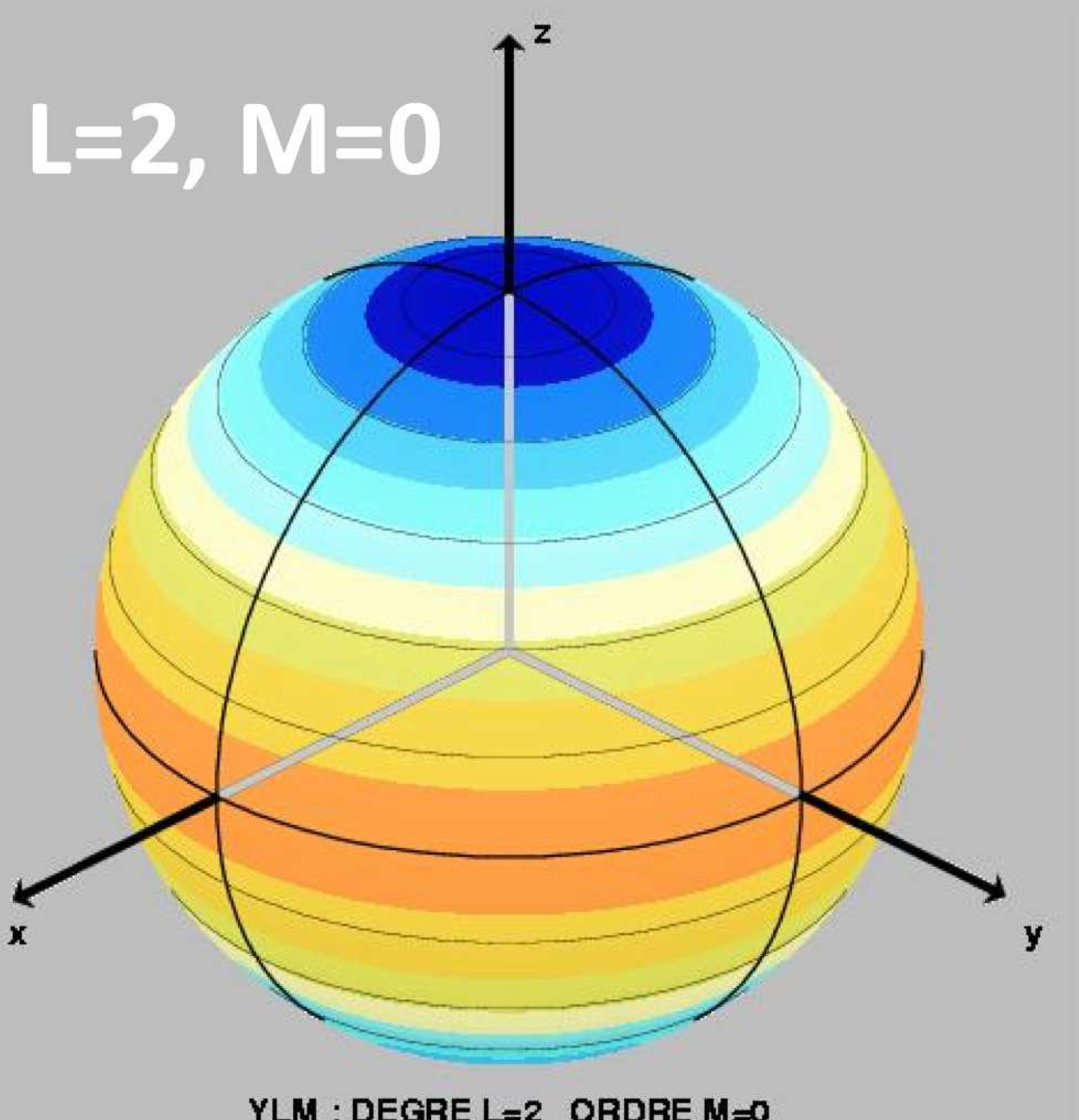
Pour un champ que l'on peut definir sur une surface sphérique (r=constante), par exemple la topographie terrestre, on supprime la dépendance en r pour obtenir les harmoniques sphériques surfaciques :

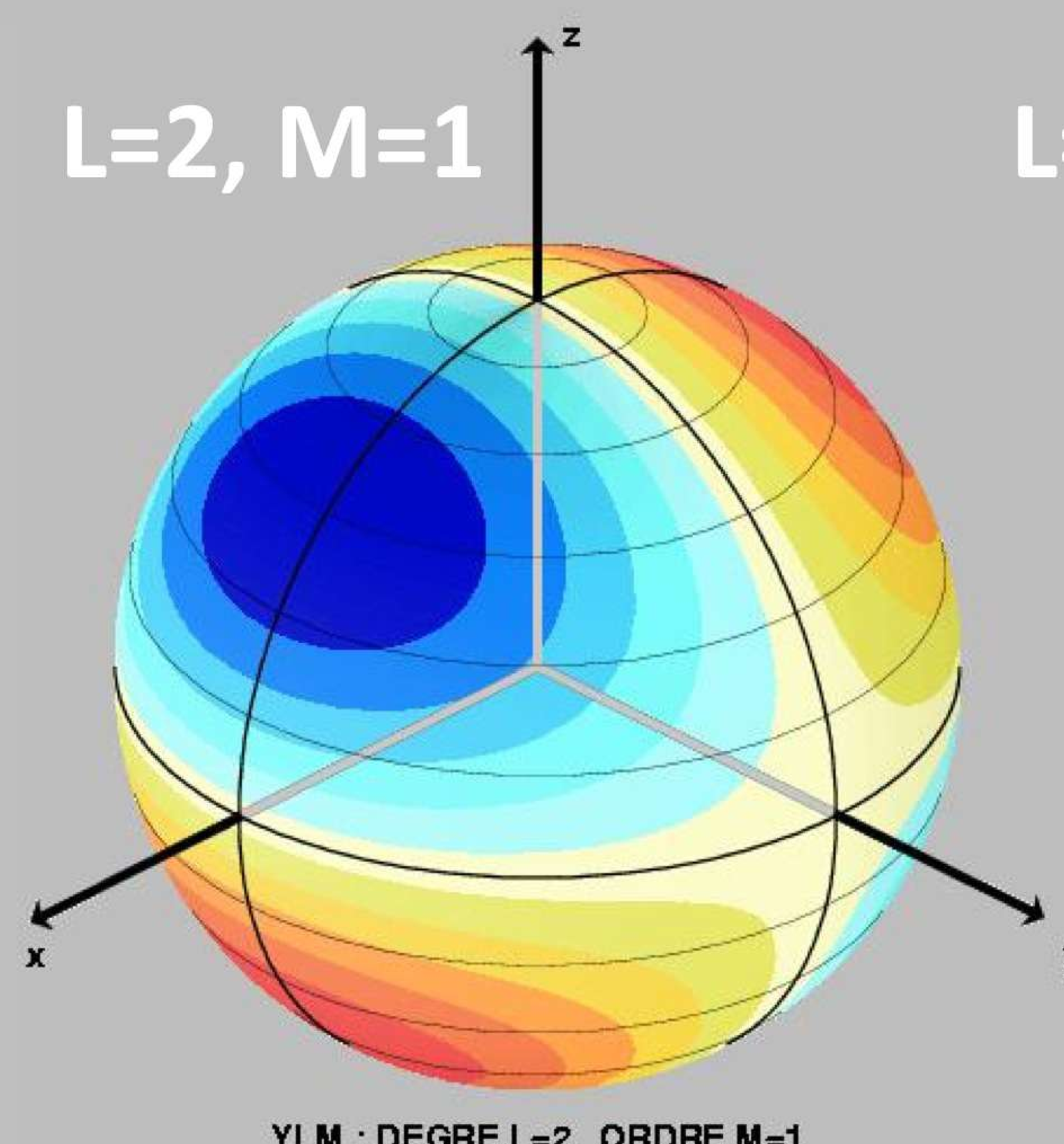
$$Y_l^m(\theta,\varphi) = C_l^m P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

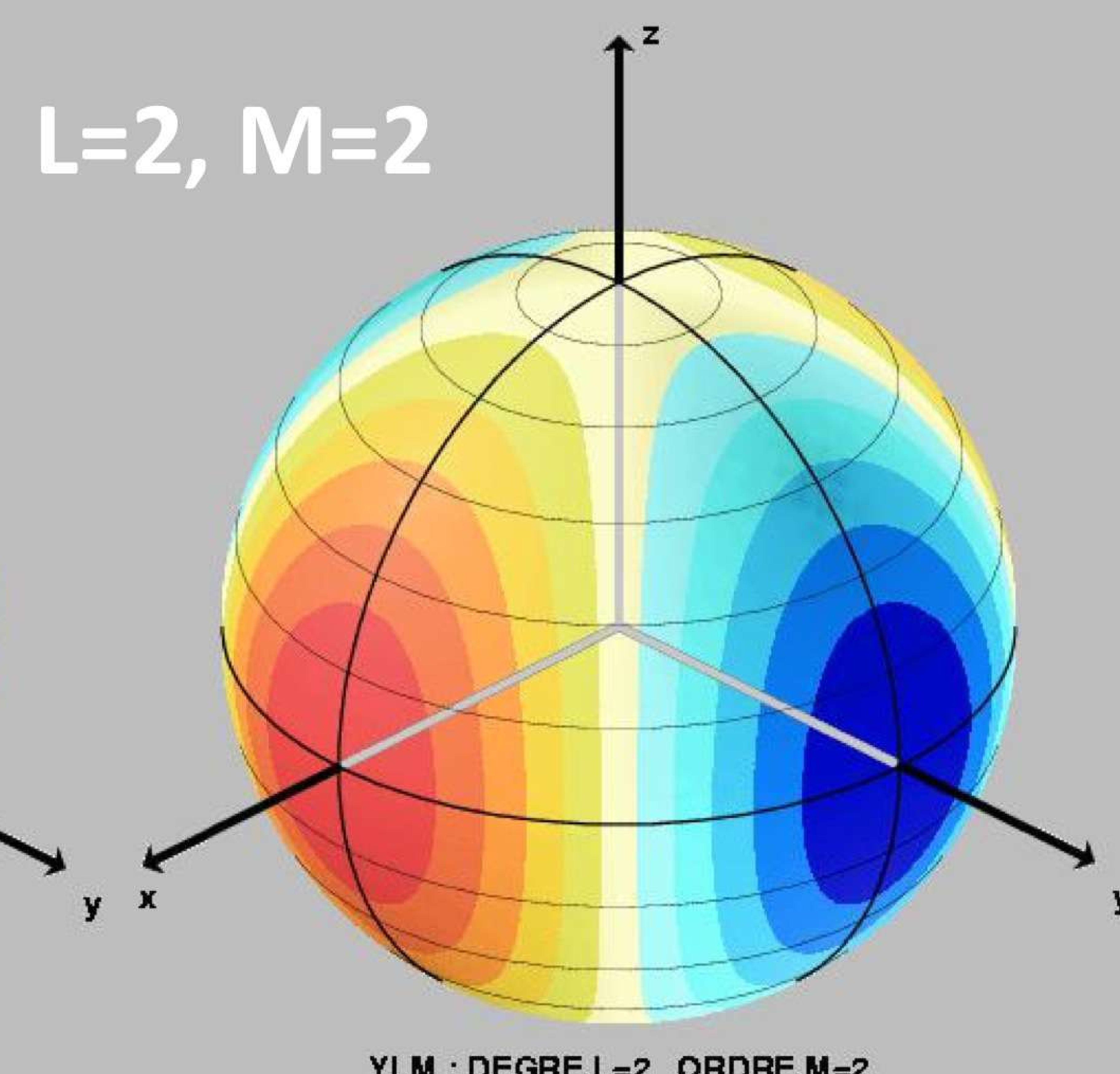




- il y a *l* coups de couteau dans la sphère
→ *m* sont "verticaux" (longitude)
→ *l-m* sont "horizontaux" (latitude)

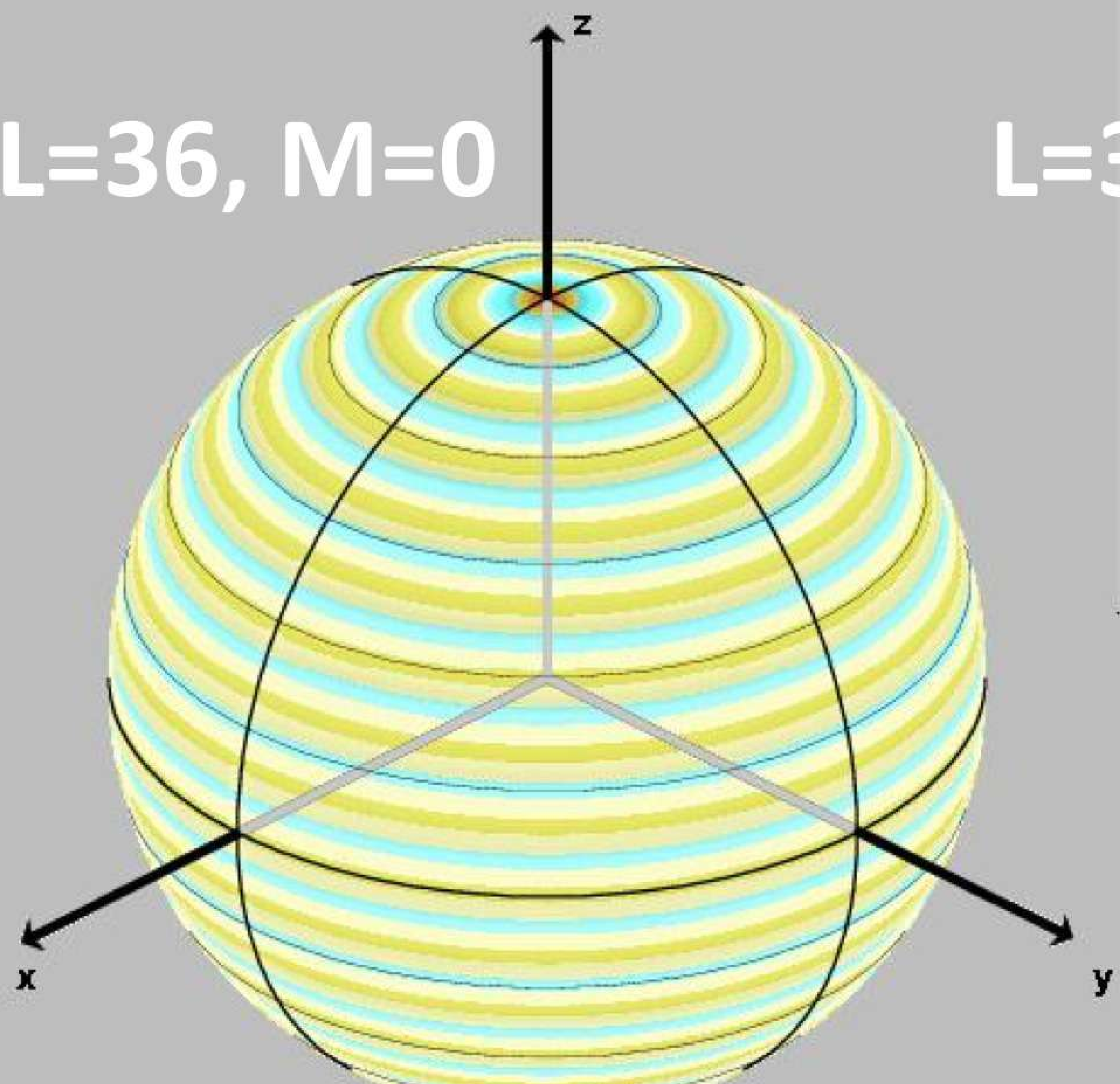






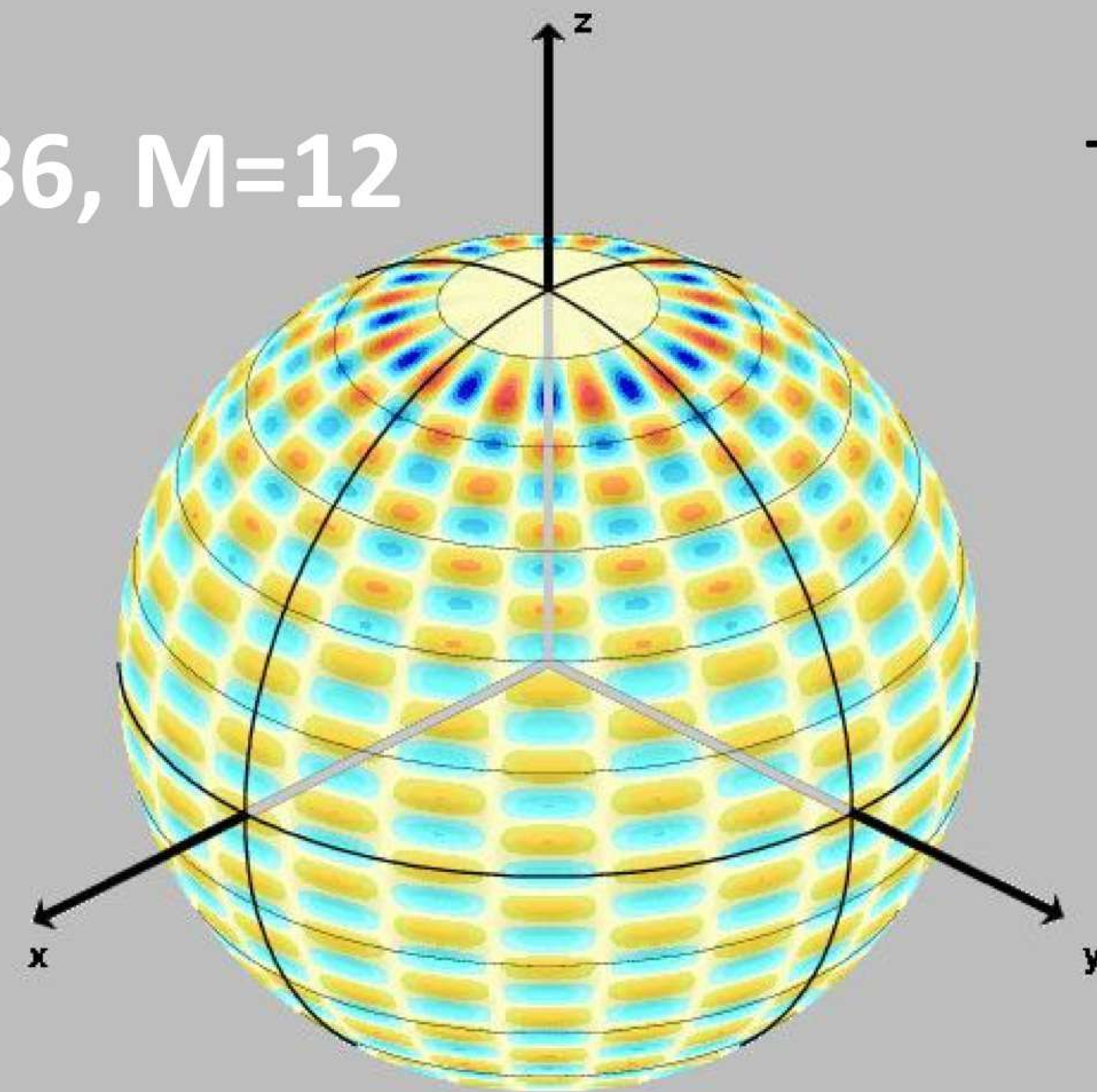
- il y a *l* coups de couteau dans la sphère
→ *m* sont "verticaux" (longitude)
→ *l-m* sont "horizontaux" (latitude)

L=36, M=0



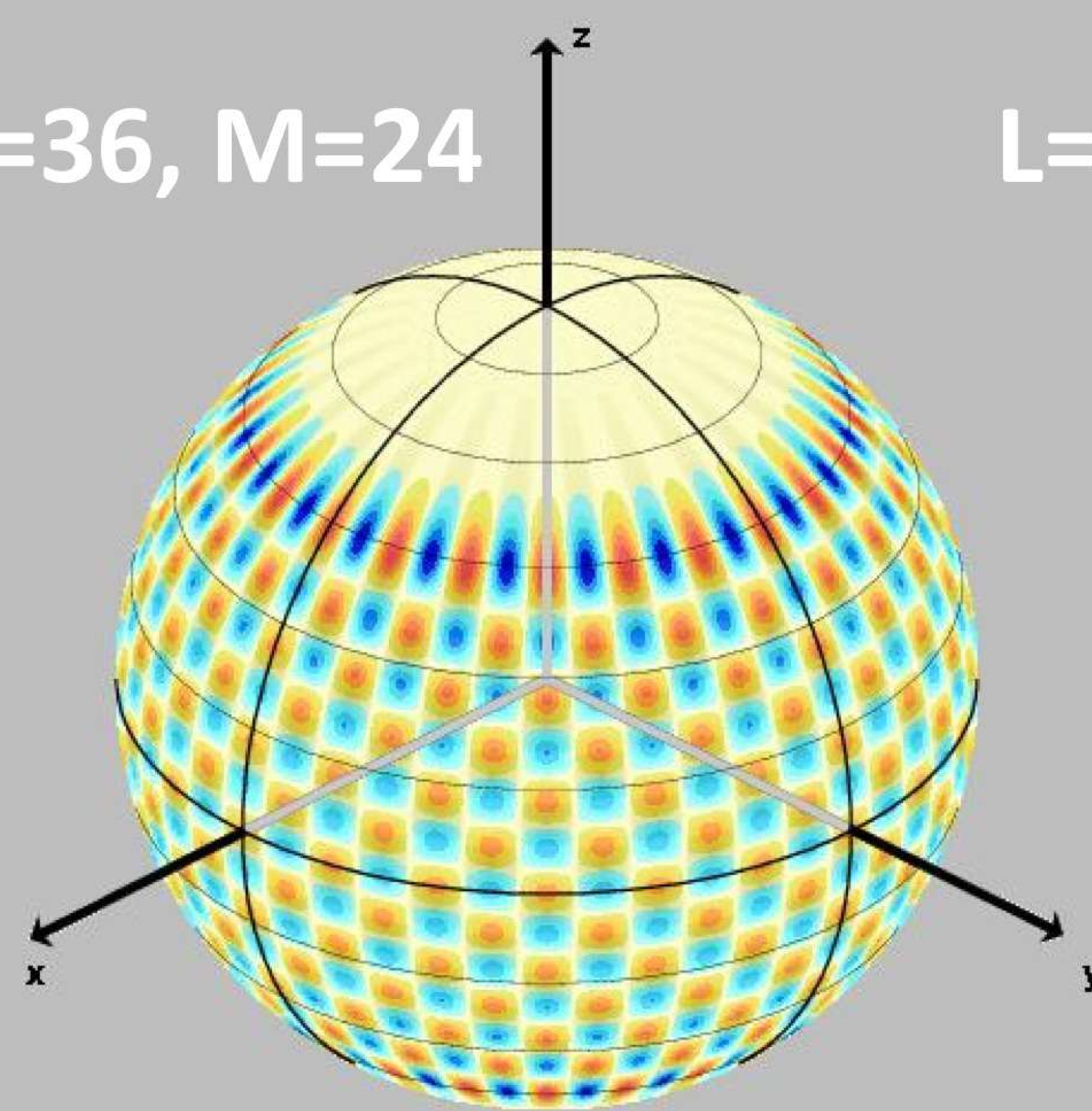
YLM : DEGRE L=36 ORDRE M=0

L=36, M=12



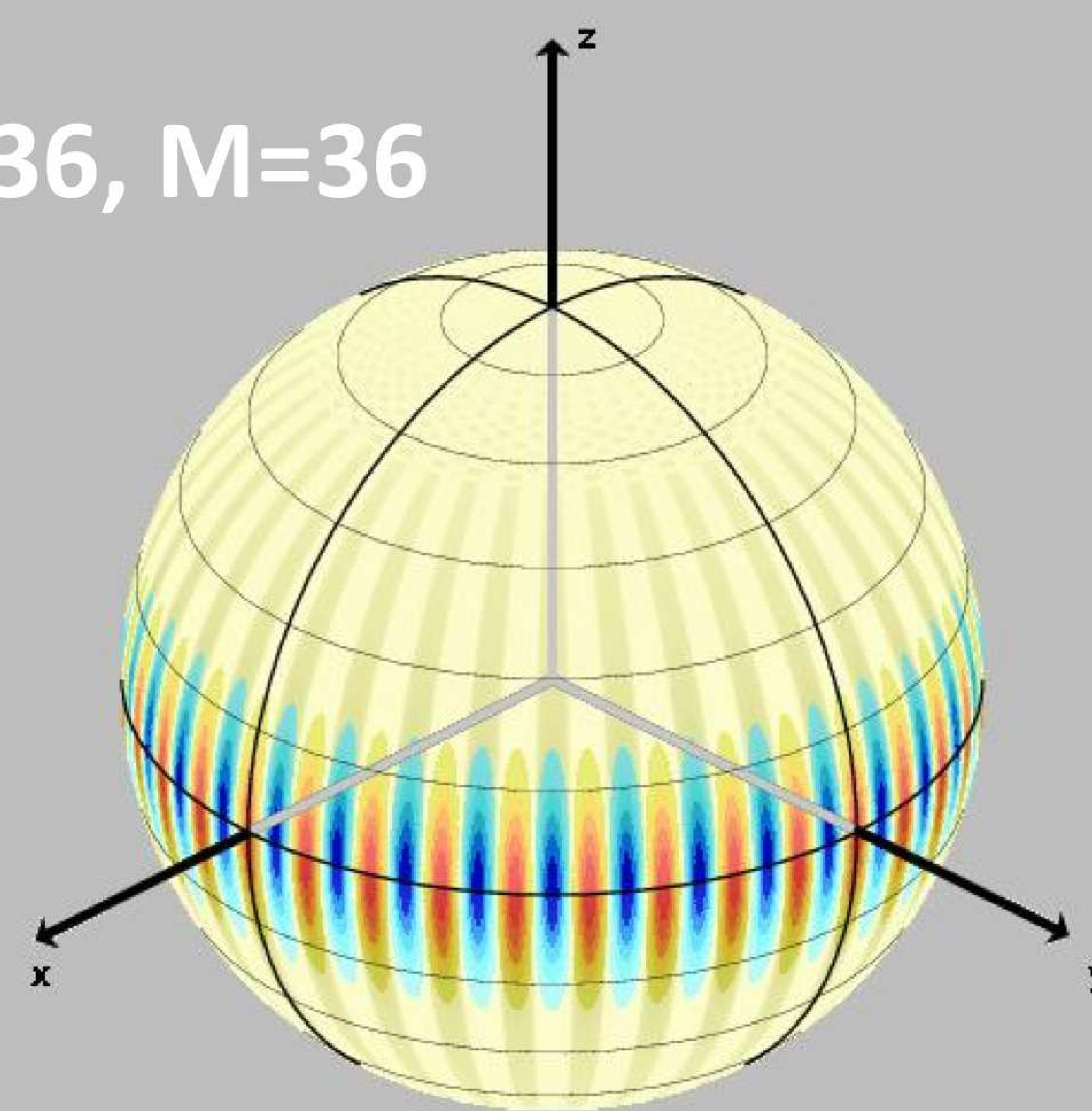
YLM : DEGRE L=36 ORDRE M=12

L=36, M=24



YLM : DEGRE L=36 ORDRE M=24

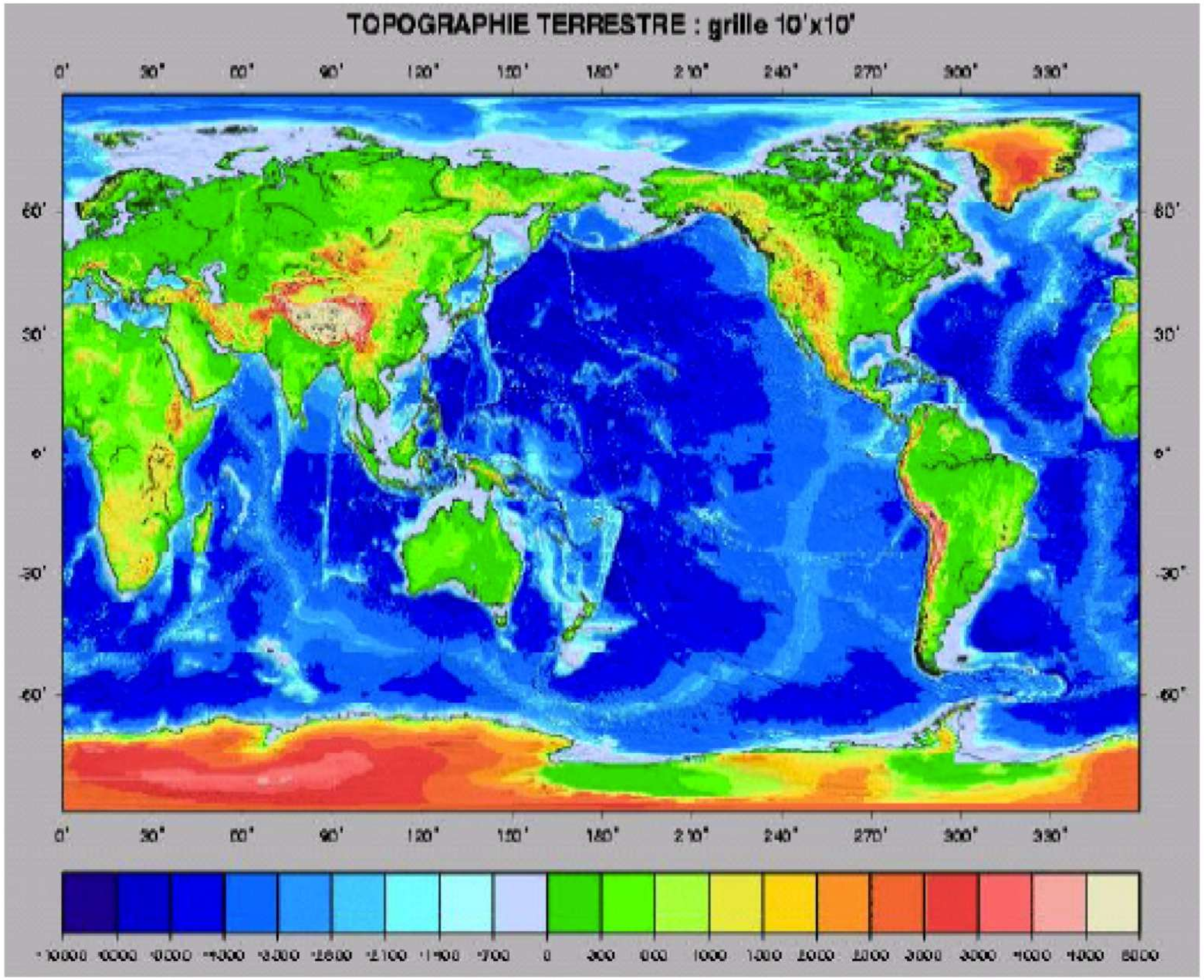
L=36, M=36



YLM : DEGRE L=36 ORDRE M=36

Décomposition d'un champ sur la base des harmoniques sphériques

Application à la topographie terrestre



Carte de la topographie terrestre $h(\theta, \varphi)$ "telle qu'elle est", c'est dire, une valeur d'altitude toutes les 10 minutes (6 points par degré).

On obtient une grille de 1080x2160 points, c'est dire 2332800 points !

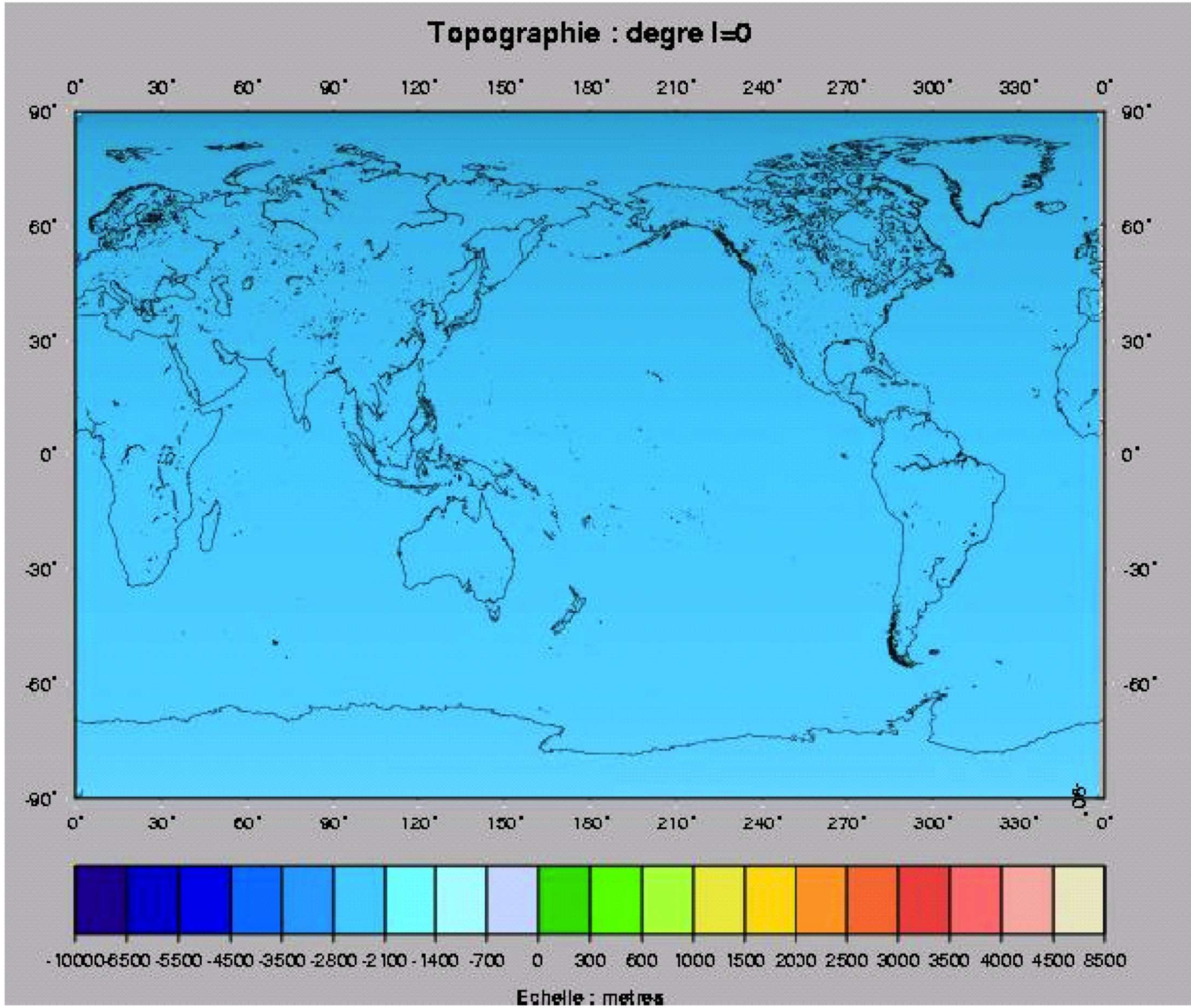
from *http://www.geologie.ens.fr/ vigny/cours/chp-gphy-2.html*

On va décomposer ce champ scalaire en harmoniques sphériques:

$$h(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \left[a_n^m \cos(m\varphi) + b_n^m \sin m\varphi \right] P_n^m(\cos\theta)$$

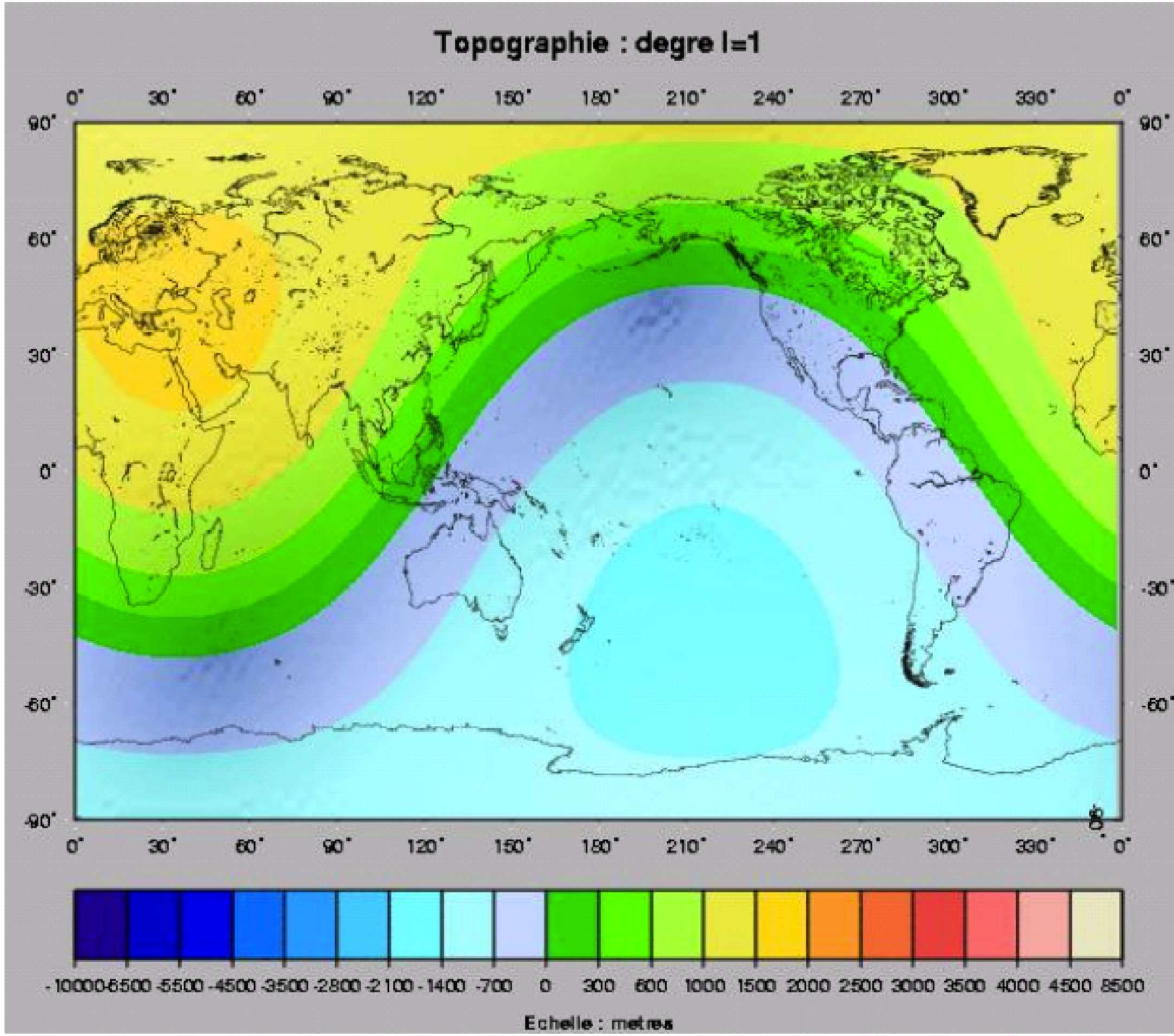
Remarque : ici n = degré, parfois l = degré : faire attention !

Topographie de degré $n = 0$



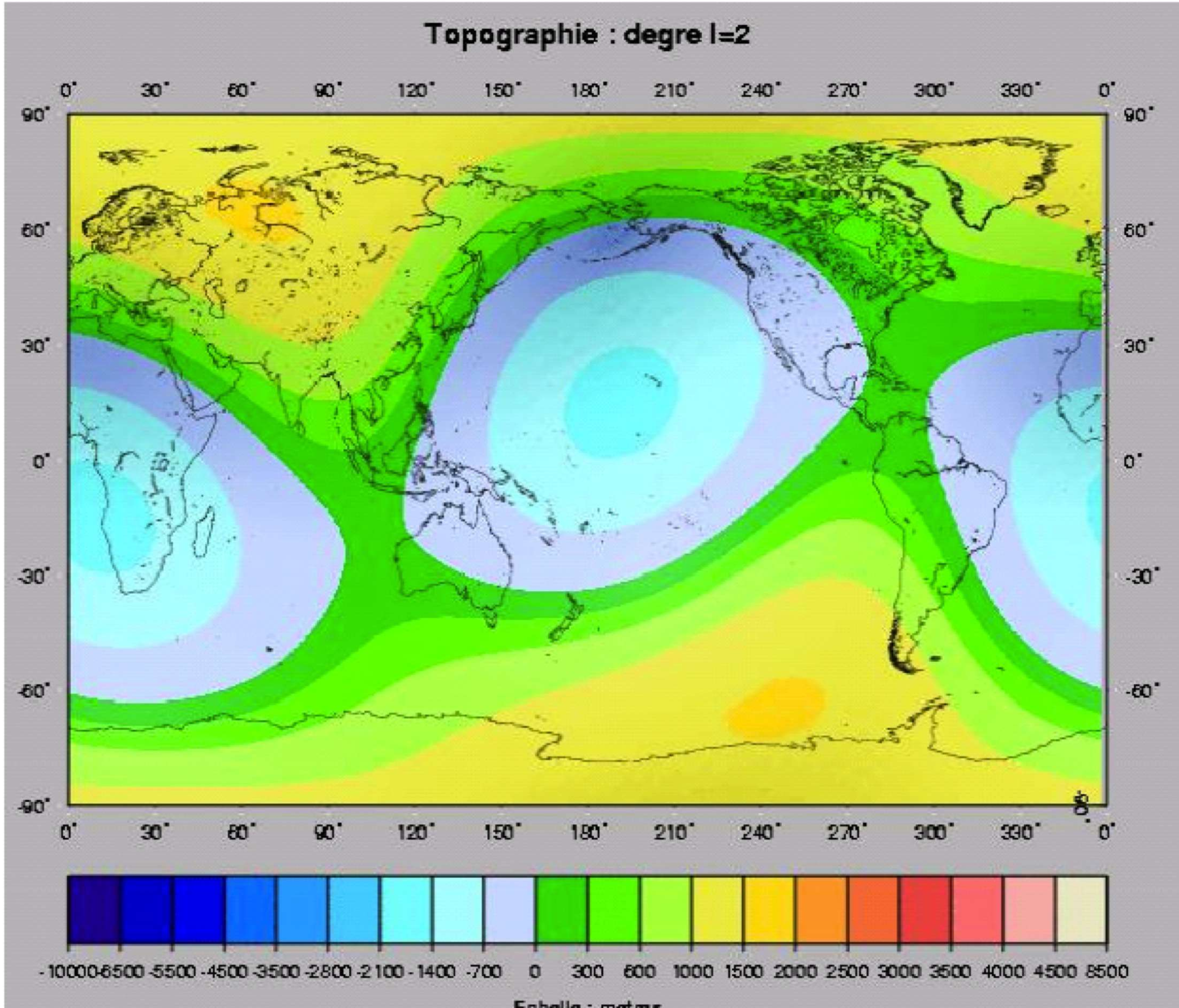
from *http://www.geologie.ens.fr/ vigny/cours/chp-gphy-2.html*

Topographie de degré $n = 1$



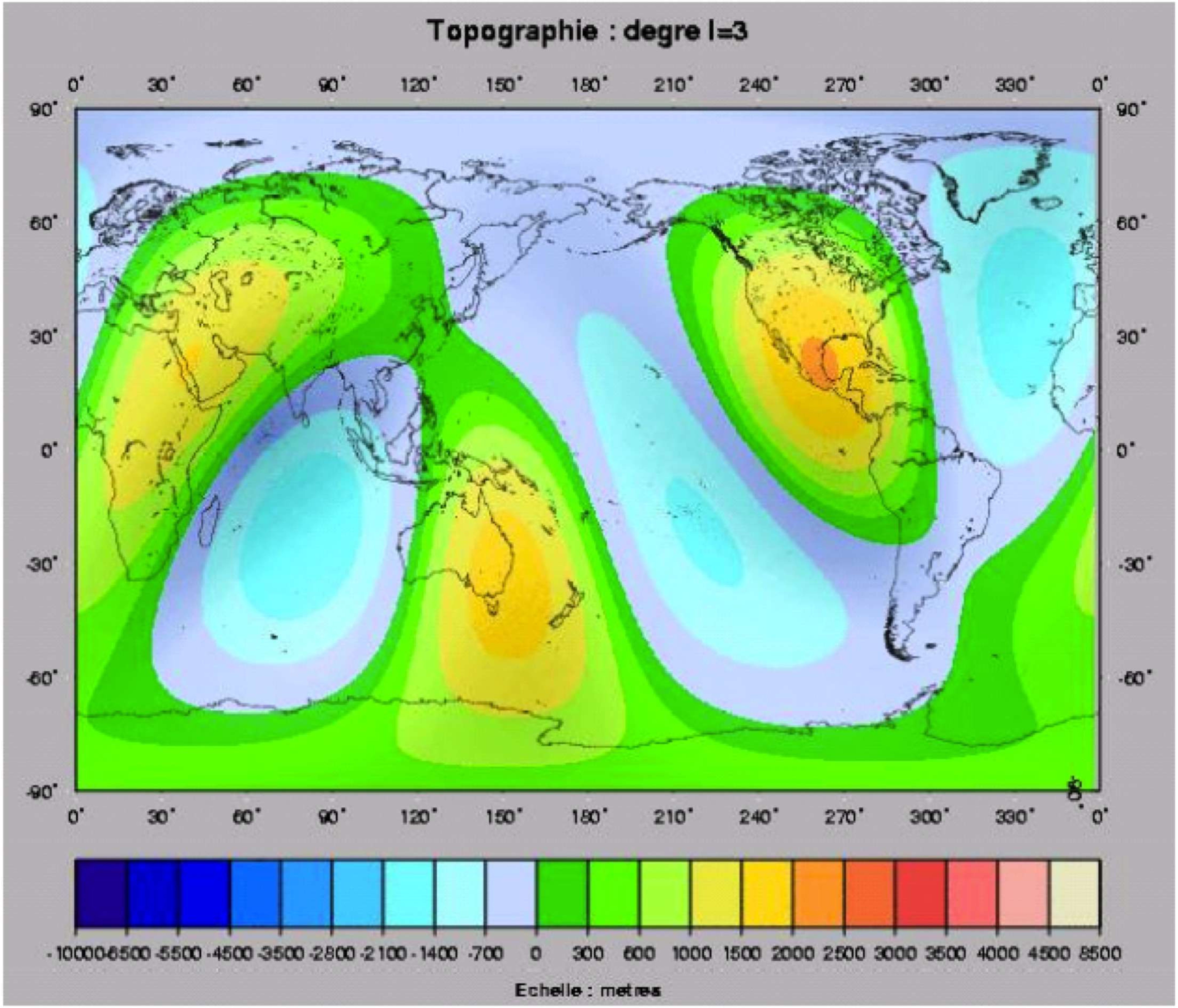
from *http://www.geologie.ens.fr/ vigny/cours/chp-gphy-2.html*

Topographie de degré $n = 2$



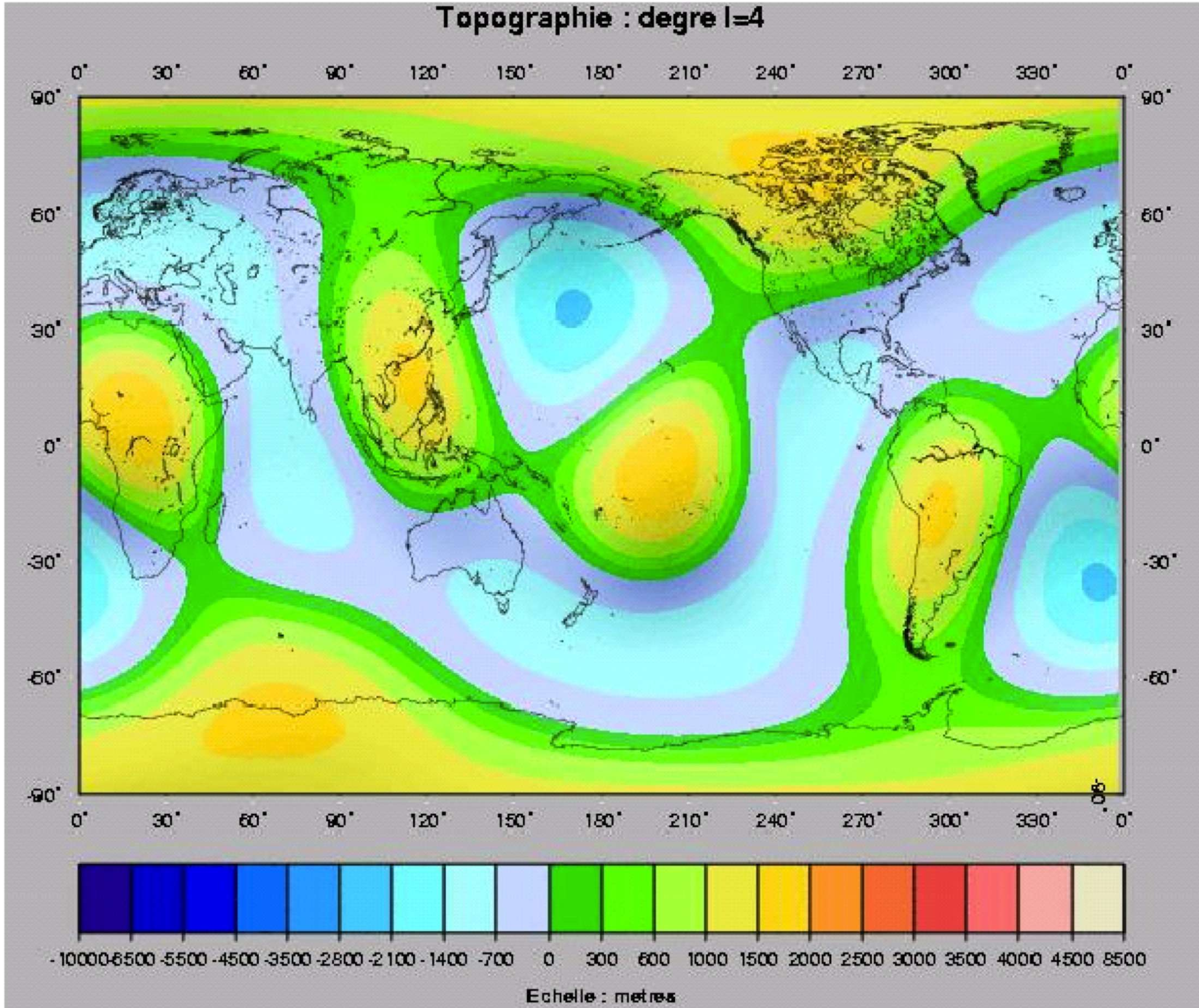
from *http://www.geologie.ens.fr/ vigny/cours/chp-gphy-2.html*

Topographie de degré $n = 3$



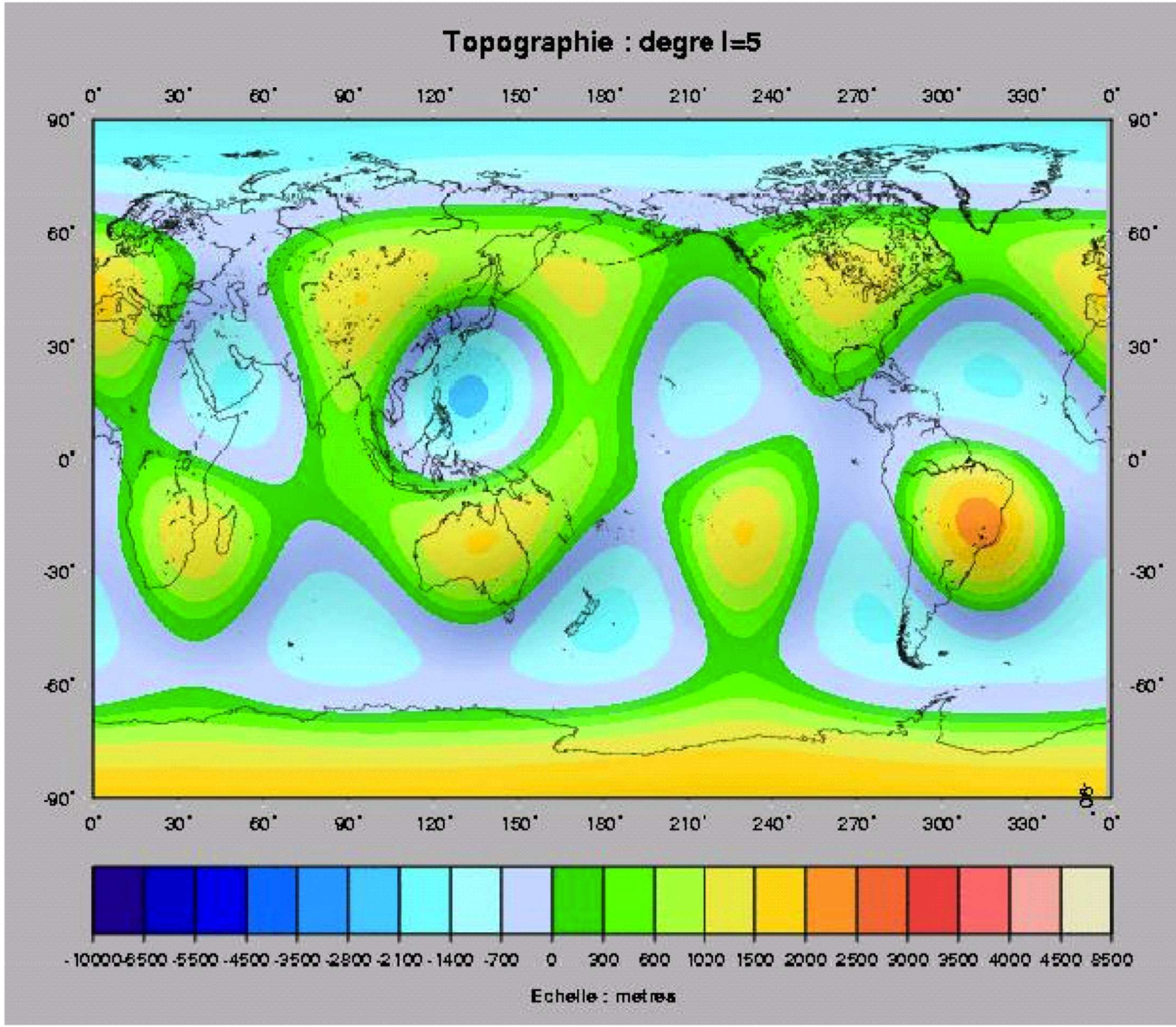
from *http://www.geologie.ens.fr/ vigny/cours/chp-gphy-2.html*

Topographie de degré $n = 4$



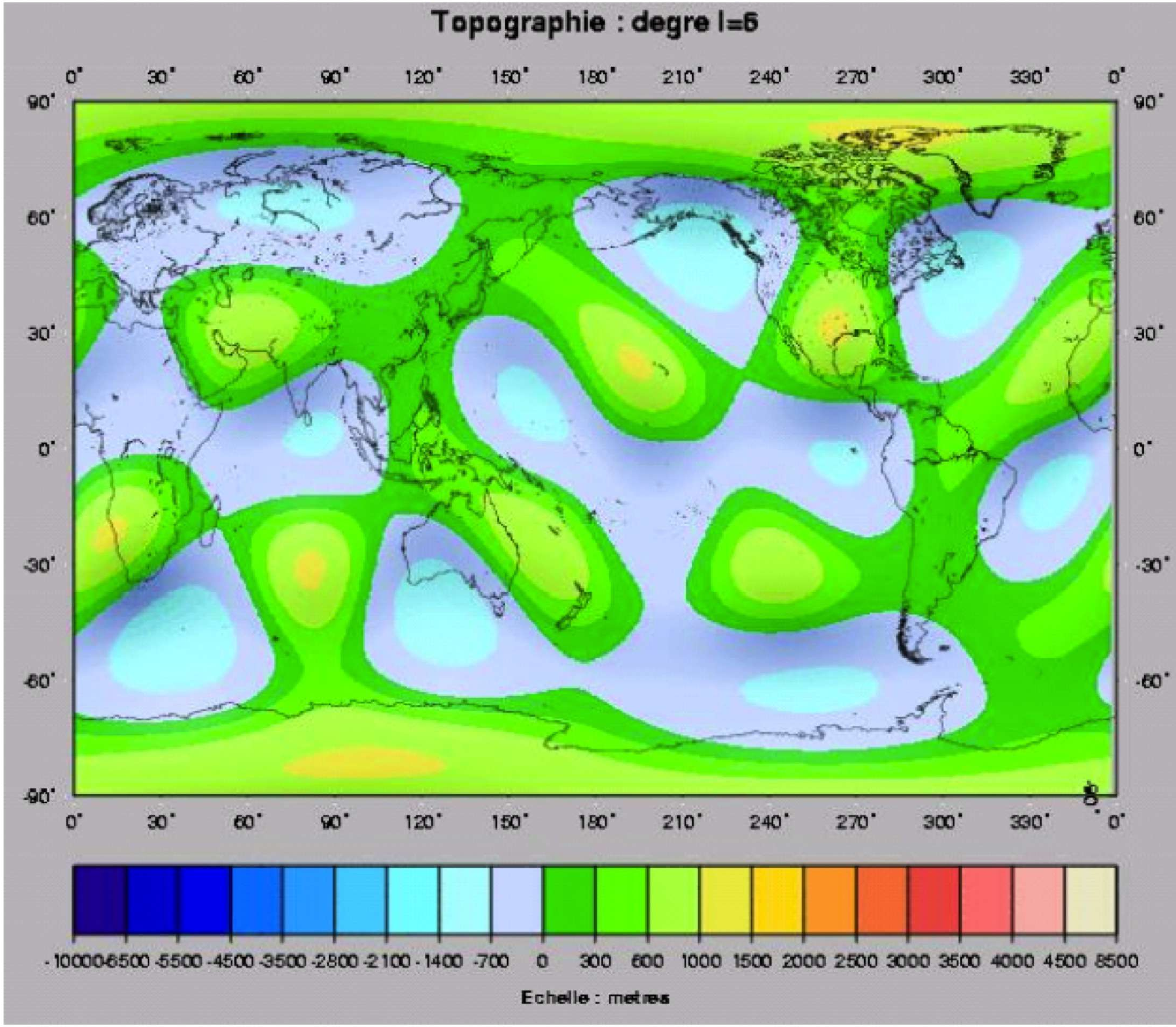
from *http://www.geologie.ens.fr/ vigny/cours/chp-gphy-2.html*

Topographie de degré $n = 5$



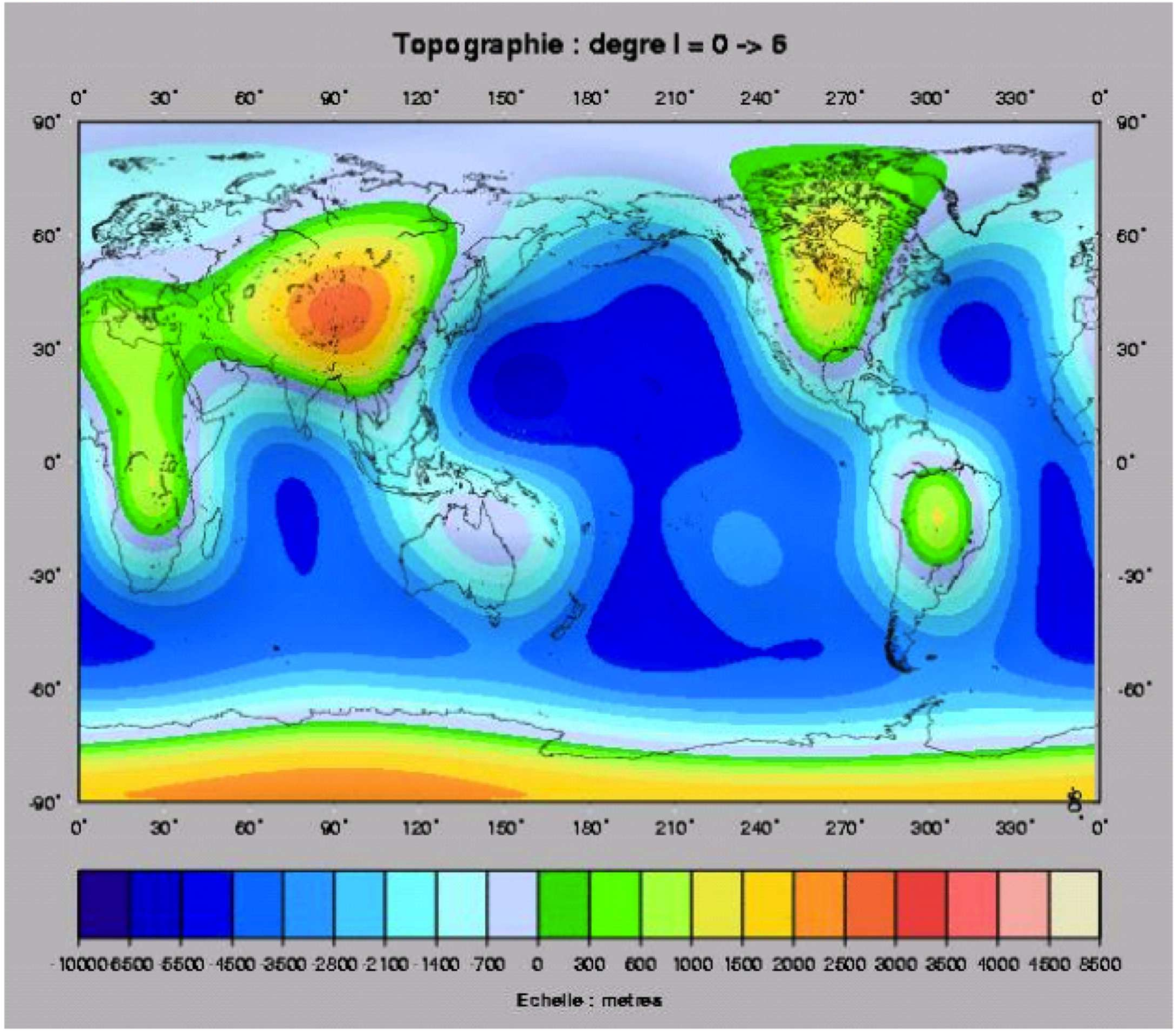
from *http://www.geologie.ens.fr/ vigny/cours/chp-gphy-2.html*

Topographie de degré $n = 6$



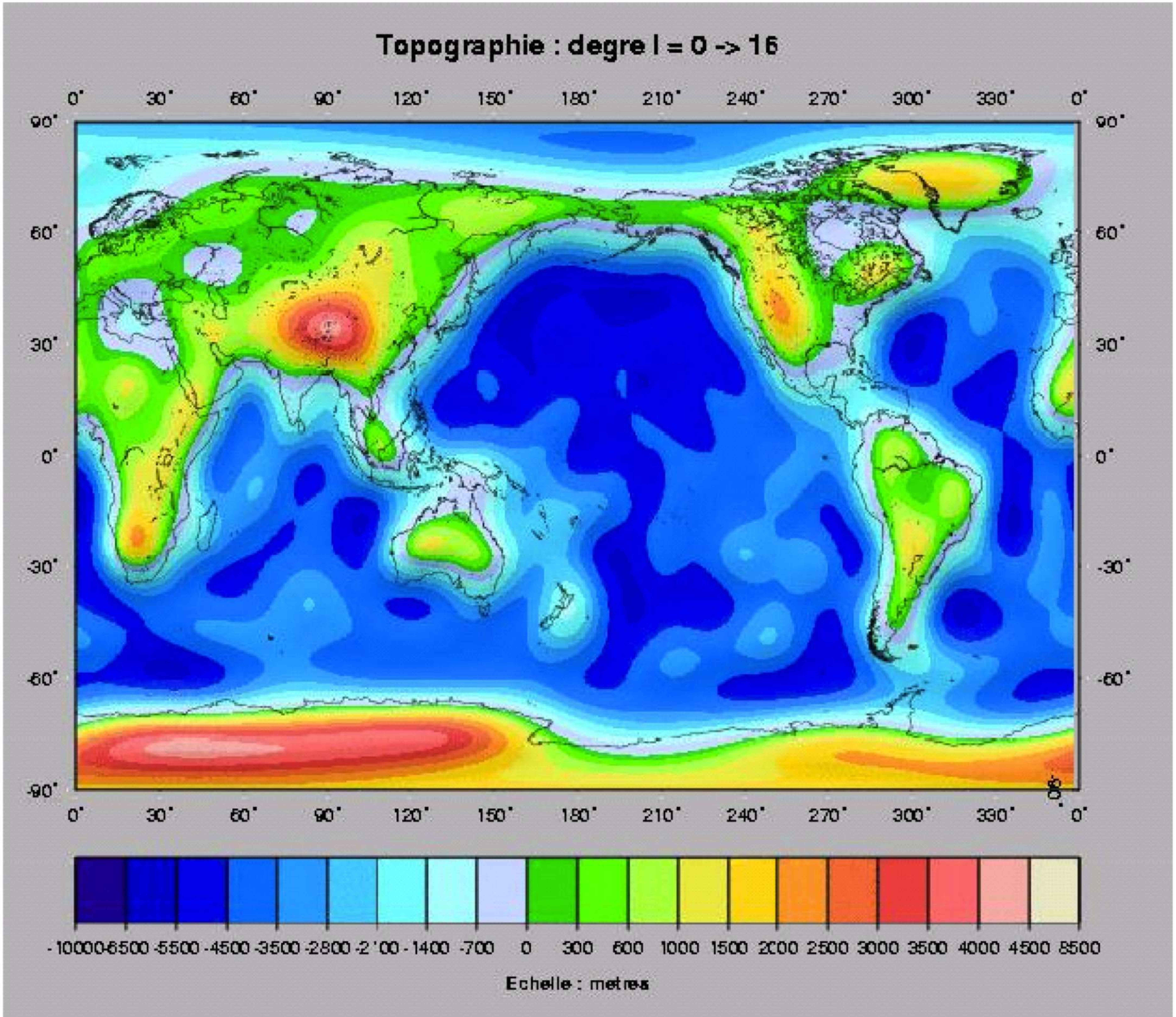
from *http://www.geologie.ens.fr/ vigny/cours/chp-gphy-2.html*

Topographie sommée sur les degrés $n = 1..6$



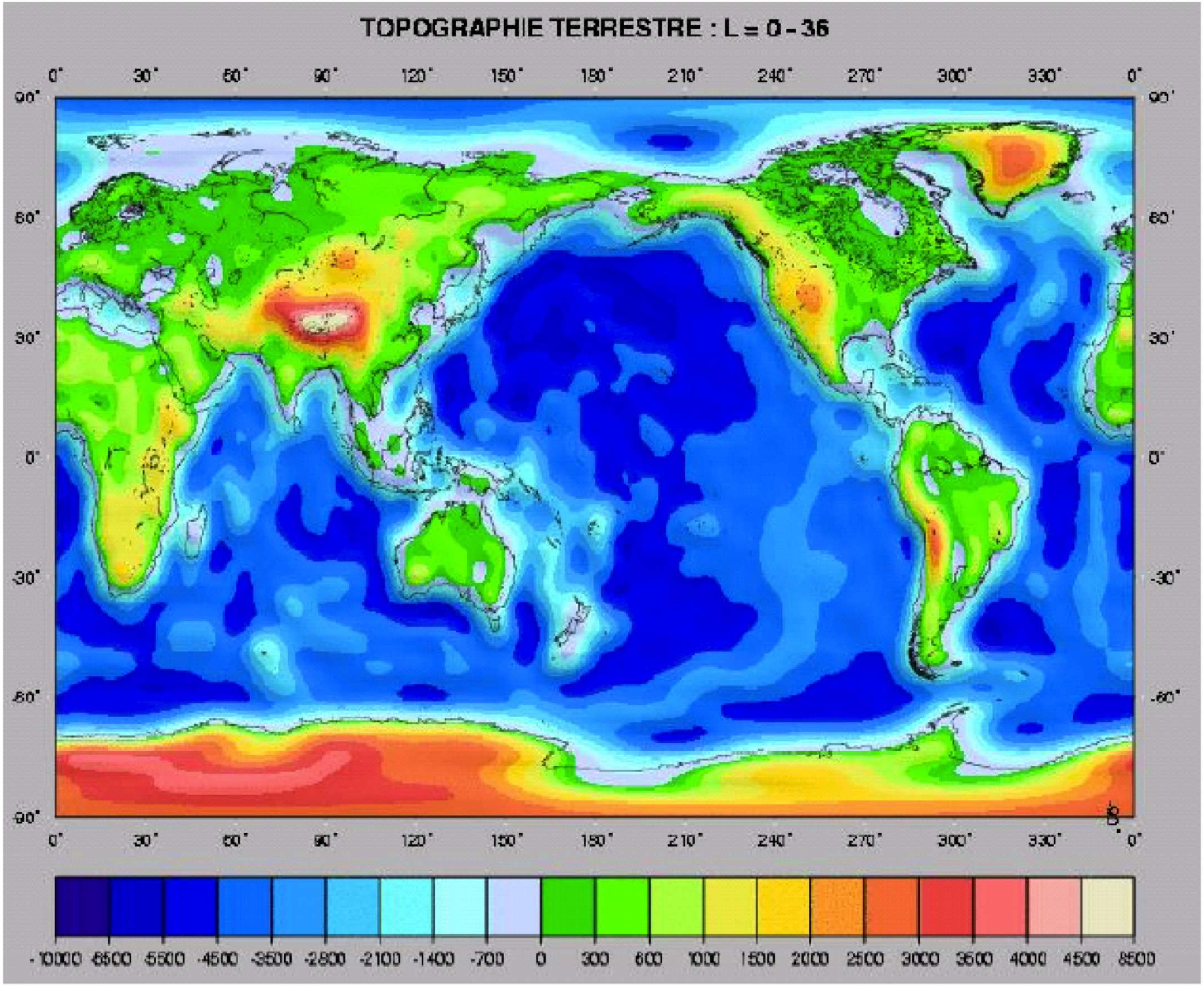
from *http://www.geologie.ens.fr/ vigny/cours/chp-gphy-2.html*

Topographie sommée sur les degrés $n = 1..16$

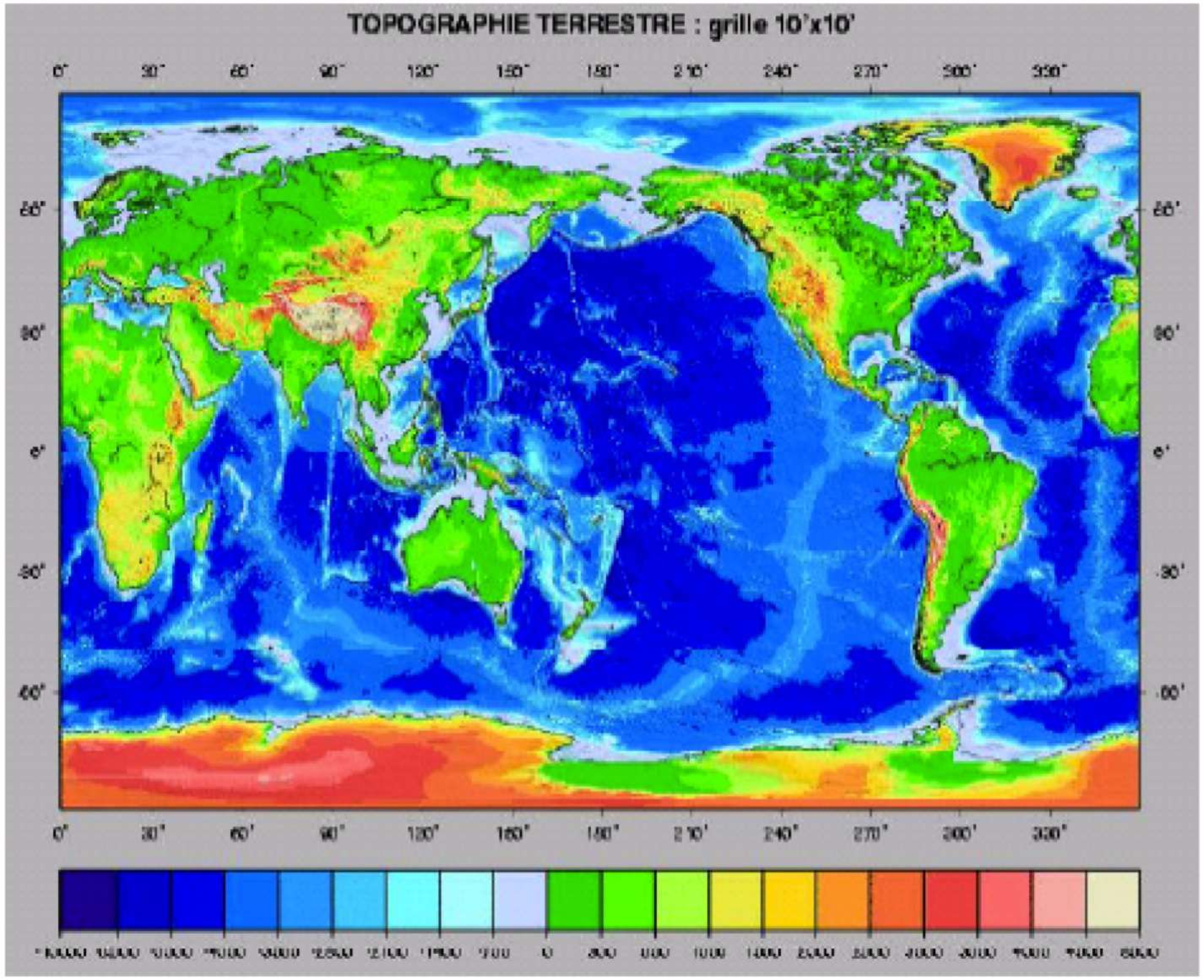


from *http://www.geologie.ens.fr/ vigny/cours/chp-gphy-2.html*

Topographie sommée sur les degrés $n = 1..36$

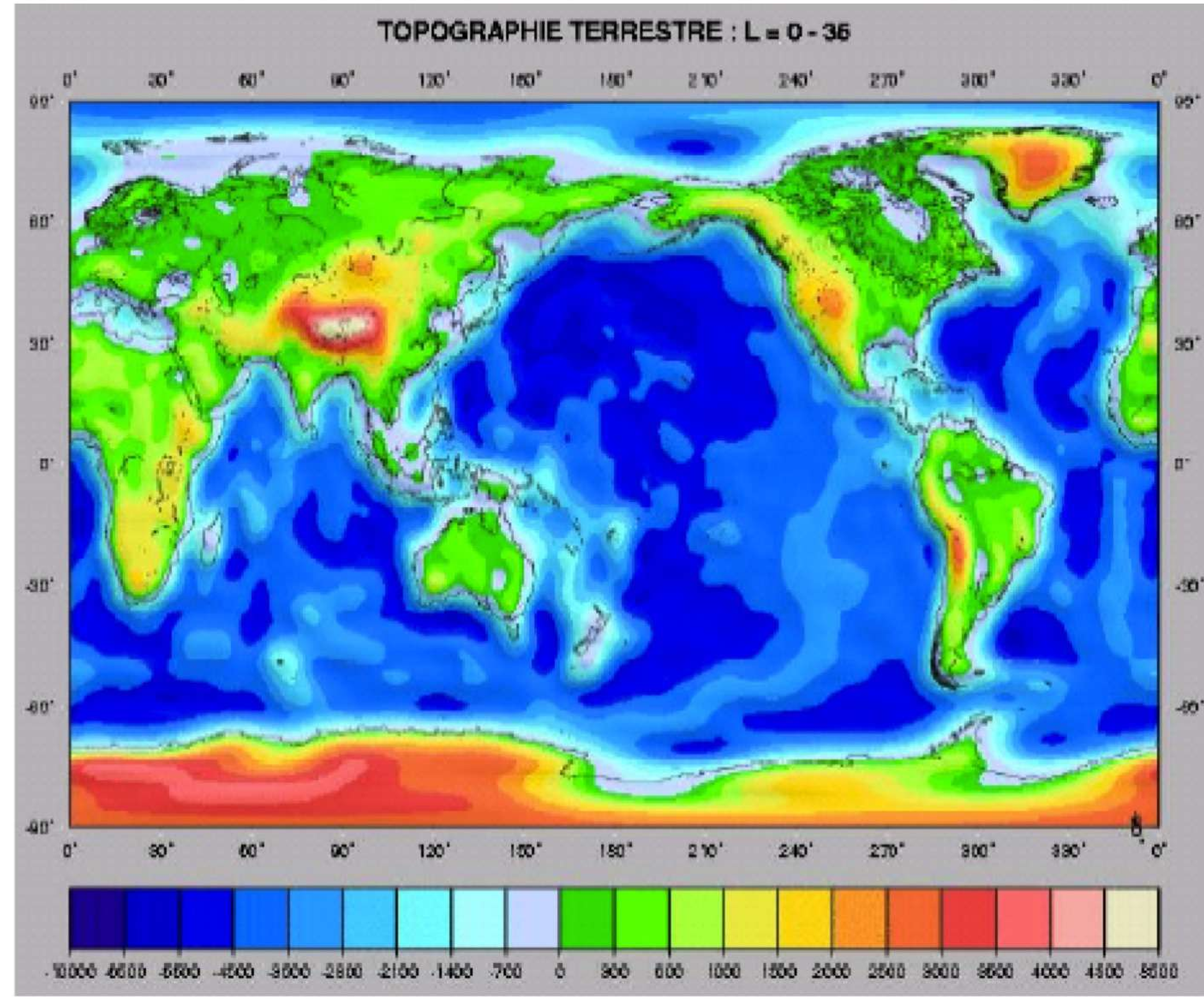


from *http://www.geologie.ens.fr/ vigny/cours/chp-gphy-2.html*



Carte de la topographie terrestre "telle qu'elle est", c'est dire, une valeur d'altitude toutes les 10 minutes (6 points par degré).

from *http://www.geologie.ens.fr/ vigny/cours/chp-gphy-2.html*



Carte de la topographie terrestre décomposée sur la base des harmoniques sphériques jusqu'au degré l = 36.
La carte est un peu "lissée": les détails les plus fins, de taille caractéristique inférieure à 1000 km ($l = 36 => = 1000km$), sont éliminés.

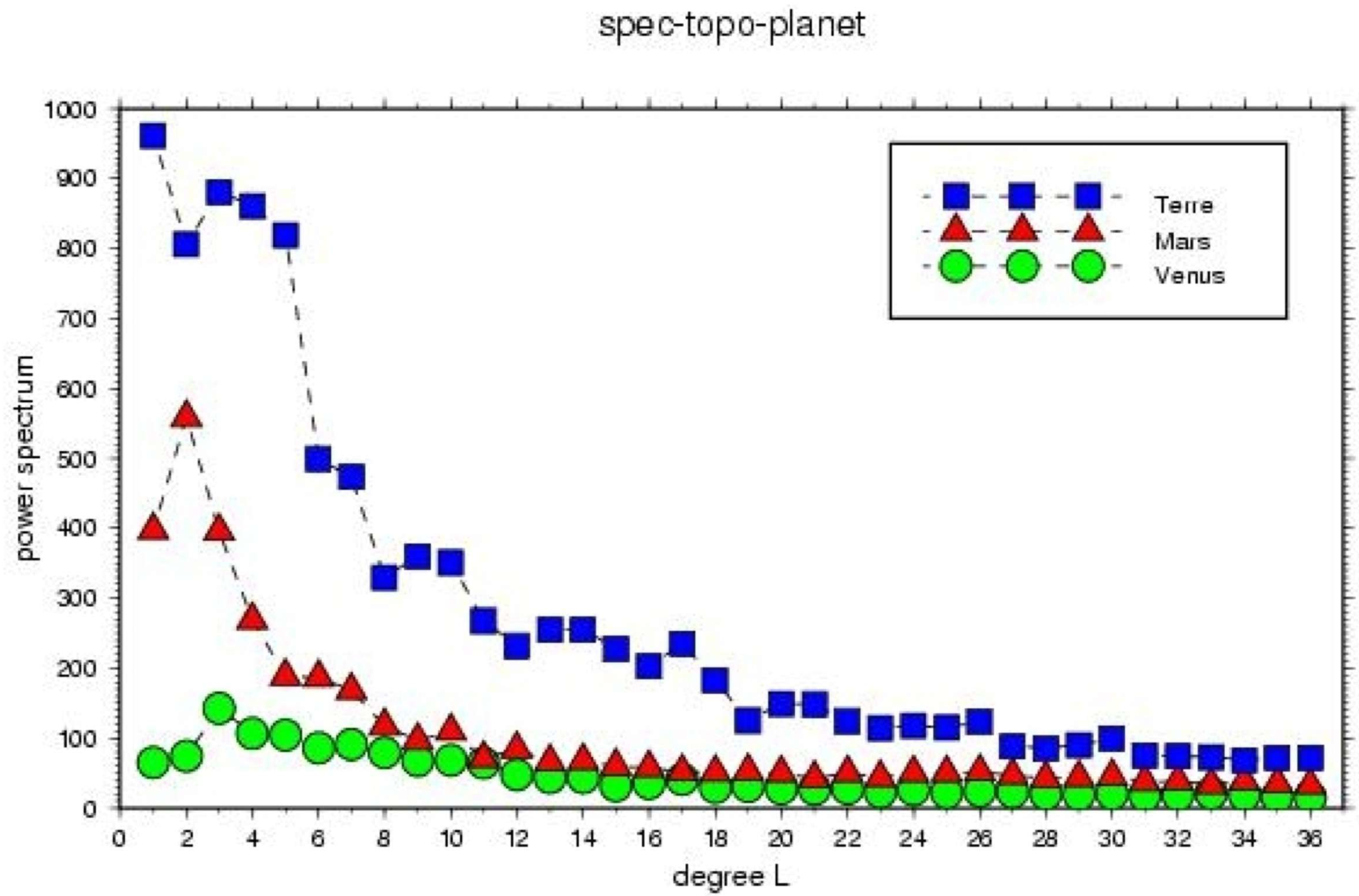
La figure ci-dessus à gauche montre une carte de la topographie terrestre "telle qu'elle est", c'est à dire, une valeur d'altitude toutes les 10 minutes (6 points par degré). On obtient une grille de 1080x2160 points, c'est à dire **2 332 800 points** !

La figure ci-dessus à droite montre une carte de la topographie terrestre après qu'elle ait été décomposée sur la base des harmoniques sphériques jusqu'au degré n = 36. on voit qu'on obtient quelque chose de raisonnablement ressemblant à partir de **seulement** 36x37=**1406 coefficients** a_n^m et b_n^m.
En effet, pour n=0 à 36 et m=0 à n, il y a (n+1)(n+2)/2 coefficients a_n^m et pareil pour b_n^m, ce qui fait (n+1)(n+2)=1406 coefficients en tout.

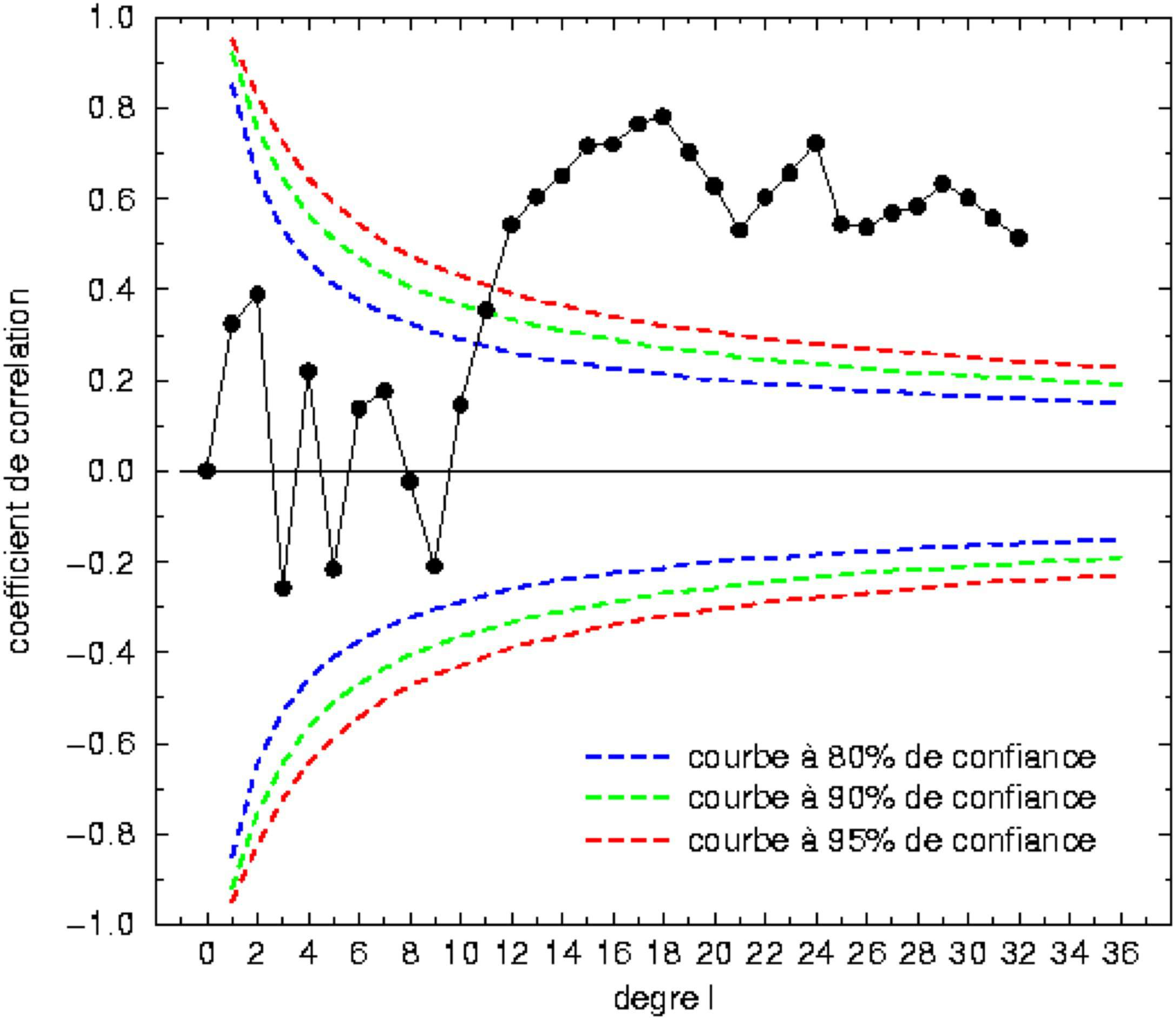
Evidemment, la carte est un peu "lissée", c'est à dire que les détails les plus fins, de taille caractéristique inférieure à 1000 km (n=36 → 1000 km), sont éliminés par le fait que l'on arrête la décomposition en harmoniques sphériques à ce niveau là.

C'est un peu comme si un géant palpait la Terre avec des doigts de 1000 km de largeur : il ne pourrait pas sentir les creux et les bosses plus petits que ses doigts ...

Spectre d'un champ sur la base des HS : exemple de la topo pour Terre, Mars, Vénus



Corrélation entre deux champs



Utilisation des harmoniques sphériques en tomographie sismique à l'échelle globale

Geophysical Journal International

Geophys. J. Int. (2010) doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04884.

S40RTS: a degree-40 shear-velocity model for the mantle from new Rayleigh wave dispersion, teleseismic traveltime and normal-mode splitting function measurements

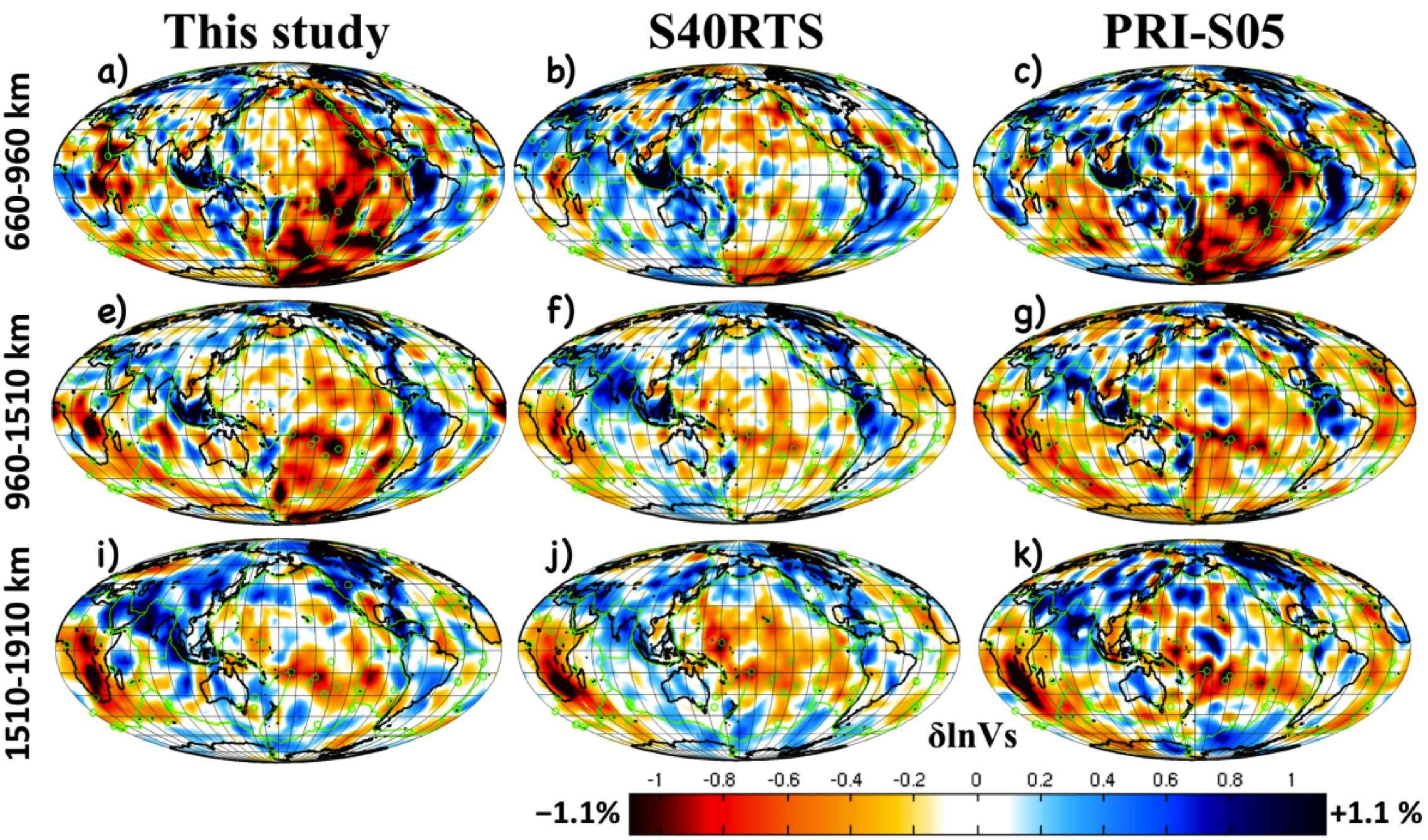
J. Ritsema,[1] A. Deuss,[2] H. J. van Heijst[3] and J. H. Woodhouse[3]

We parametrize horizontal variation of δV_S using spherical harmonics up to order 40.

Figure 10. Whole-mantle cross-sections centered on (A) eastern Africa and (B) the western Pacific for models (top) S40RTS and (bottom) S20RTS. Shear-velocity perturbations are between −1.5 per cent and +1.5 per cent.

Visual comparison with other global $\delta \ln V_S$ models

« mid lower-mantle »



w.r.t. IASP91

Zaroli et al. (2013)

Quantitative comparison : Spherical Harmonics

Significative correlation up to degree 30 (anomalies of size 1000 km)

Zaroli et al. (2013)