TD9 — **Autour des polynômes de Legendre**

1. Formule de récurrence
   D'après le cours, on a la relation suivante (fonction génératrice) :

$$\{1 - t(2x - t)\}^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n P_n(x)$$

   avec $|t| < 1$ et $|x| \leq 1$. En utilisant cette relation, ainsi que sa dérivée par rapport à t, montrer que l'on a la relation de récurrence suivante :

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0\,. \tag{1}$$

2. Une autre formule de récurrence
   En utilisant la relation :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t^n P_n'(x) = \frac{d}{dx}\{1 - t(2x - t)\}^{-1/2}$$

   avec $P_n'(x) = \frac{dP_n(x)}{dx}$, montrer que l'on a :

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x)\,. \tag{2}$$

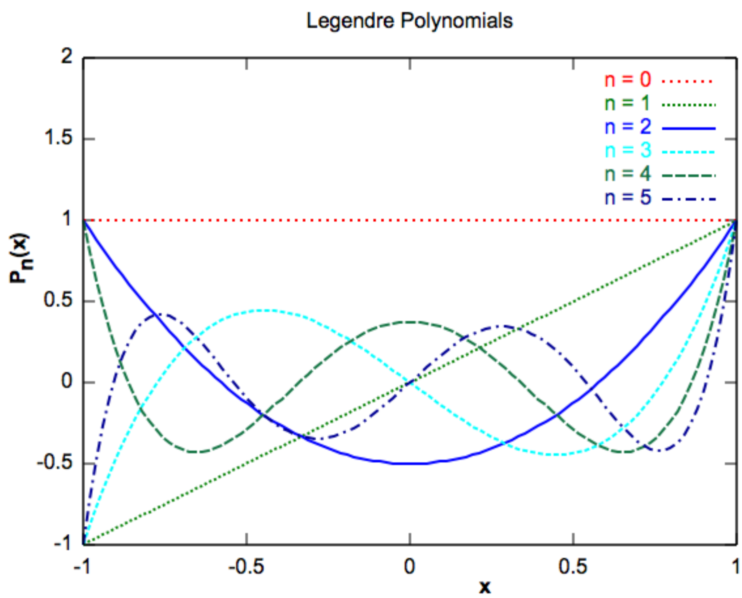

FIGURE 1 – Exemples de polynômes de Legendre $P_n(x)$. [Wiki]