TD7 — **Autour de la dérivée covariante d'un vecteur**

— Introduction

La dérivée covariante d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ est donnée par :

$$\begin{cases} \nabla_k v^i = \partial_k v^i + v^j \Gamma_{k\,j}^{\,i} \\ \nabla_k v_l = \partial_k v_l - v_m \Gamma_{k\,l}^{\,m} . \end{cases} \tag{1}$$

On se propose de démontrer dans ce TD que : les composantes mixtes, $\nabla_k v^i$, et les composantes covariantes, $\nabla_k v_l$, de la "dérivée covariante d'un vecteur" se transforment comme celles d'un tenseur d'orde 2.

— Cas des composantes mixtes

Montrer que, lors d'un changement de système de coordonnées curvilignes, on a la relation :

$$\nabla_k v^i = \nabla_l \hat{v}^m \hat{A}^l_k A^i_m . \tag{2}$$

où le symbole ˆ représente le deuxième système de coordonnées considéré (souvent noté avec un ' (prime) dans le cours), et où l'on a :

$$A^i_m = \frac{\partial y^i}{\partial \hat{y}^m} \quad \text{et} \quad \hat{A}^l_k = \frac{\partial \hat{y}^l}{\partial y^k} . \tag{3}$$

Lors de la démonstration, il faudra notamment prouver l'égalité suivante :

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial y^k \partial \hat{y}^j} = \frac{\partial y^i}{\partial \hat{y}^m} \frac{\partial \hat{y}^l}{\partial y^k} \hat{\Gamma}_{l\,j}^{\,m} - \frac{\partial y^l}{\partial \hat{y}^j} \Gamma_{k\,l}^{\,i} \tag{4}$$

On rappelle la relation du cours suivante qui sera utile (et qui nous avait appris que les symboles de Christoffel ne sont généralement pas des tenseurs d'ordre 3) :

$$\hat{\Gamma}_{k\,i}^{\,j} = A^l_i \hat{A}^j_m A^n_k \Gamma_{n\,l}^{\,m} + \hat{A}^j_l \frac{\partial A^l_i}{\partial \hat{y}^k} . \tag{5}$$

— Cas des composantes covariantes

Après avoir résolu la question précédente, il suffit à présent de montrer que les composantes covariantes définies en équation (1) s'obtiennent à partir des composantes mixtes par la relation classique que l'on a vue en cours entre les composantes mixtes et covariantes d'un tenseur du deuxième ordre, c'est-à-dire :

$$\nabla_k v_l = g_{il} \nabla_k v^i , \tag{6}$$

où g_{il} représente les composantes covariantes du tenseur fondamental (ou tenseur métrique).