MATHEMATIQUES - 1A - EOST - 2020/2021 - C. Zaroli

TD6 — **Accélération, Christoffel, Laplacien, Divergence**

1. Accélération d'une particule *(exercice du TD5 à finir)*

   Une particule se déplace le long d'une trajectoire définie en coordonnées sphériques (r, θ, φ). Déterminer les composantes contravariantes a^k de l'accélération $\mathbf{a}$ de cette particule pour les trajectoires suivantes.

   (a) La trajectoire est définie par : $r = c$, $\theta = \omega t$, $\varphi = \pi/4$; où t est le temps. Faire un schéma.

   (b) La trajectoire est définie par : $r = c$, $\theta = \pi/4$, $\varphi = \omega t$. Faire un schéma.

   (c) Calculer, pour les deux types de trajectoires, la norme de l'accélération et montrer qu'on retrouve la formule : $\|\mathbf{a}\| = R\omega^2$, avec R le rayon du mouvement circulaire.

2. Symboles de Christoffel contractés

   Montrer que l'on a la relation suivante (symboles de Christoffel contractés) :

$$\Gamma_{i\,j}^{\,i} = \sum_i \Gamma_{i\,j}^{\,i} \overset{?}{=} \frac{1}{2} g^{ik} \partial_j g_{ik} = \sum_{i,k} \frac{1}{2} g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial y^j} .$$

3. Calcul de l'équation de Laplace en coordonnées sphériques

   En coordonnées cartésiennes, dans un espace Euclidien de dimension 3, le problème de Laplace consiste à trouver toutes les fonctions à trois variables réelles $\psi(x, y, z)$ qui vérifient l'équation aux dérivée partielles du second ordre :

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

   Plus généralement, pour n'importe quel système de coordonnées curvilignes, on a la relation :

$$\Delta\psi = g^{ij}(\partial_i\partial_j\psi - \Gamma_{i\,j}^{\,k}\partial_k\psi) \qquad (2)$$

   (a) Calculer les composantes contravariantes g^{ij} du tenseur fondamental en coordonnées sphériques (r, θ, φ) — *[on pourra reprendre les valeurs trouvées au TD5]*.

   (b) Calculer les coefficients de Christoffel de deuxième espèce en coordonnées sphériques — *[on pourra reprendre les valeurs trouvées au TD5]*.

   (c) Ecrire l'équation de Laplace en coordonnées sphériques. Vérifiez que vous obtenez :

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0 \qquad (3)$$

4. Divergence en coordonnées sphériques

   En coordonnées cartésiennes (base orthonormée), dans un espace de dimension 3, la divergence du vecteur $\overrightarrow{v} = (v_x, v_y, v_z)^t$ s'écrit :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \qquad (4)$$

   Plus généralement, pour n'importe quel système de coordonnées curvilignes, on a la relation :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{v}) = \partial_i v^i + v^j \Gamma_{i\,j}^{\,i} \qquad (5)$$

   Calculer l'expression de la divergence en coordonnées sphériques (r, θ, φ), pour un champ de vecteurs $\overrightarrow{v}$ de composantes contravariantes v^i dans le repère naturel. On utilisera les expressions des coefficients de Christoffel de l'exercice précédent.