

TD5 — Symboles de Christoffel, Accélération d'une particule

1. Symboles de Christoffel et tenseur métrique

(a) Partant de l'expression du cours : $\Gamma_{kji} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki})$, démontrer la relation :

$$\partial_k g_{ij} = \Gamma_{jik} + \Gamma_{kji} \quad (1)$$

(b) En utilisant le résultat précédent, démontrer la relation :

$$\partial_m g^{lj} = -g^{li} \Gamma_{mi}^j - g^{jk} \Gamma_{mk}^l \quad (2)$$

2. Calcul des symboles de Christoffel

Calculer les composantes des coefficients de Christoffel de première et deuxième espèce dans les cas suivants.

- (a) En coordonnées sphériques.
- (b) En coordonnées cylindriques.

3. Accélération d'une particule

Une particule se déplace le long d'une trajectoire définie en coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

Déterminer les composantes contravariantes a^k de l'accélération \mathbf{a} de cette particule pour les trajectoires suivantes.

- (a) La trajectoire est définie par : $r = c$, $\theta = \omega t$, $\varphi = \pi/4$; où t est le temps. Faire un schéma.
- (b) La trajectoire est définie par : $r = c$, $\theta = \pi/4$, $\varphi = \omega t$. Faire un schéma.
- (c) Calculer, pour les deux types de trajectoires, la norme de l'accélération et montrer qu'on retrouve la formule : $\|\mathbf{a}\| = R\omega^2$, avec R le rayon du mouvement circulaire uniforme de la particule.