TD4 : Coordonnées curvilignes

1. Echauffement

   On considère un espace vectoriel E_3, à trois dimensions.
   Partant de la formule du cours : $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$, démontrer que pour des vecteurs de base orthogonaux, on a :

$$g^{ik} = \frac{1}{g_{ik}} \quad \text{lorsque} \quad i = k \,. \tag{1}$$

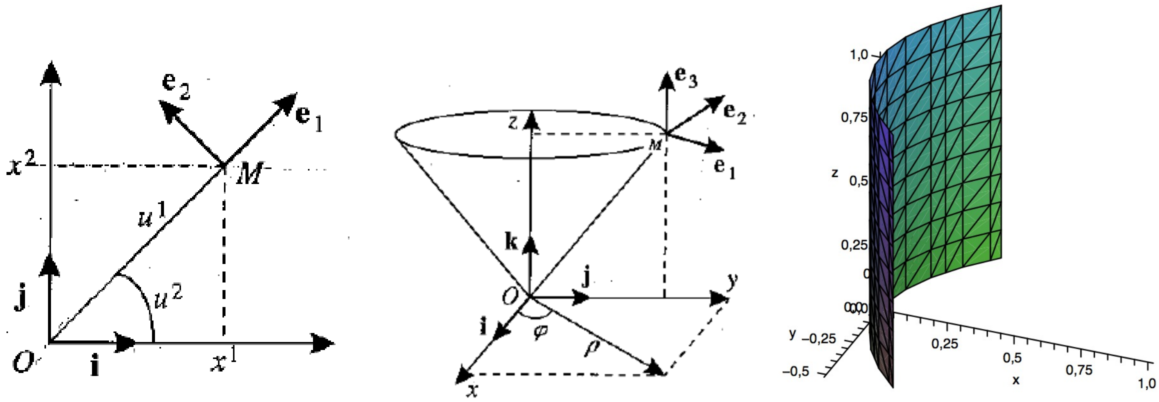

FIGURE 1 – Coordonnées polaires, cylindriques, et miroir cylindro-parabolique.

2. Coordonnées polaires

   Les coordonnées polaires dans un espace vectoriel E_2 (c'est-à-dire dans un plan) sont données par : $x^1 = u^1 \cos u^2$, $x^2 = u^1 \sin u^2$; où x^1 et x^2 sont les coordonnées cartésiennes, u^1 est la longueur OM et u^2 l'angle entre les droites (OM) et $(\mathrm{O}x^1)$; *cf.* figure 1.

   (a) Déterminer les vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ de la base naturelle, exprimés sur la base cartésienne $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.

   (b) Déterminer les composantes du tenseur fondamental de E_2 (rappel : $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$).

   (c) Déterminer l'élément linéaire $ds^2 = g_{ij}du^idu^j$, en fonction des coordonnées u^1 et u^2.

3. Coordonnées cylindriques

   Un point M est repéré en coordonnées cylindriques par les variables (ρ, φ, z) ; *cf.* figure 1.

   (a) Déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(\rho, \varphi, z)$ d'un point M quelconque sur la base cartésienne $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

   (b) Déterminer les vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de la base naturelle.

   (c) Démontrer que ces vecteurs sont orthogonaux entre eux.

   (d) Calculer les normes des vecteurs de la base naturelle.

4. Coordonnées cylindro-paraboliques

   Le miroir cylindro-parabolique est une des variantes du collecteur solaire thermique ; *cf.* figure 1. On appelle coordonnées cylindro-paraboliques les paramètres u, v, z définis par la transformation :

$$\begin{cases} x = (1/2)(u^2 - v^2) \;\; , \quad y = uv \;\; , \quad z = z \\ \text{avec} \;\; -8 < u < 8 \;, \, v \geq 0 \;, \, \text{et} \;\; -8 < z < 8 \end{cases} \tag{2}$$

   (a) Déterminer les vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de la base naturelle.

   (b) Démontrer que ces vecteurs sont orthogonaux entre eux.

   (c) Calculer leurs normes.