MATHEMATIQUES - 1A - EOST - 2020/2021 - C. Zaroli

TD3 : Vecteurs, Produit Tensoriel et Tenseur d'Inertie

1. Vecteurs

   Dans l'espace vectoriel E_3, considérons les vecteurs de base suivants :

   $$\mathbf{e}_1 = (a, 0, 0)\,, \quad \mathbf{e}_2 = (b, c, 0)\,, \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, d)\,, \tag{1}$$

   avec (a, b, c, d) quatre réels.

   (a) Démontrer que les vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ sont linéairement indépendants.

   (b) Calculer la décomposition d'un vecteur donné, $\mathbf{X} = (A, B, C)$, sur la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

2. Produit tensoriel

   Soit un espace vectoriel E_2 ayant pour base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. On considère deux vecteurs : $\mathbf{x} = 4\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{y} = \mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$.

   (a) Déterminer les composantes contravariantes du produit tensoriel de $\mathbf{x}$ par $\mathbf{y}$. On les notera : $u^{ij} = x^i y^j$.

   (b) On effectue un changement de base défini par :

   $$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

   Déterminer les nouvelles composantes contravariantes du produit tensoriel ; faire l'application numérique avec $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

3. Tenseur d'inertie

   Calculons le moment d'inertie d'une masse ponctuelle m, située en un point $\mathrm{P}(x_1, x_2, x_3)$ par rapport à une droite Δ passant par l'origine d'un référentiel cartésien $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ dont les vecteurs de base sont orthonormés.

   (a) Que pouvez-vous dire des composantes contravariantes et covariantes dans un tel référentiel ?

   (b) Le moment d'inertie de cette masse, située à la distance d de la droite Δ, est : $\mathcal{M} = md^2$. Soient a_1, a_2, a_3 les cosinus directeurs de la droite Δ par rapport aux axes $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_1})$, $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_2})$ et $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_3})$. Soit $\overrightarrow{e_\Delta} = (a_1, a_2, a_3)$. Soit P' la projection de P sur Δ, c'est-à-dire :

   $$|\overrightarrow{\mathrm{OP}'}| = |\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{e_\Delta}| = |a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3| \tag{3}$$

   Faire un schéma de la situation et calculer explicitement d^2.

   (c) On définit le tenseur d'inertie :

   $$\mathrm{I}_{ij} = m(x_k x_k \delta_{ij} - x_i x_j) \tag{4}$$

   Montrer que ce tenseur est symétrique.

   (d) Montrer que, avec la convention de sommation d'Einstein $(1 \leq i, j \leq 3)$, le moment d'inertie $\mathcal{M}$ peut s'écrire :

   $$\mathcal{M} = a_i a_j \mathrm{I}_{ij} \tag{5}$$

   Remarque : Les quantités I_{ii} représentent les moments d'inertie par rapport aux axes de coordonnées correspondants ; les quantités I_{ij}, pour $i \neq j$, s'appellent les produits d'inertie.