MATHEMATIQUES – 1A EOST – 2020/2021 – C. Zaroli

TD2 : les Tenseurs

1. Echauffement (convention d'Einstein)
Démontrer que l'on a l'identité suivante :

$$(a_{ik} - a_{ki})x_i x_k = 0 \tag{1}$$

2. Tenseur d'ordre 2
Soit, dans un espace Euclidien à 2 dimensions, une base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ telle que le tenseur métrique s'écrive :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \tag{2}$$

   (a) Construire la base (c-à-d la représenter graphiquement).

   (b) Dans la base $(\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$, un vecteur $\overrightarrow{W}$ a pour composantes contravariantes les w^i, et un vecteur $\overrightarrow{V}$ a pour composantes covariantes les v_j dans la base réciproque $(\overrightarrow{e}^1, \overrightarrow{e}^2)$.
   Quelles sont les composantes contravariantes de $\overrightarrow{V}$ (notées v^i) et les composantes covariantes de $\overrightarrow{W}$ (notées w_j) ?

   (c) Dans cette même base, un tenseur $\mathbf{T}$, d'ordre 2, a pour composantes deux fois covariantes :

$$t_{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

   Calculer les composantes mixtes et les composantes deux fois contravariantes de ce tenseur.

3. Tenseur d'ordre 3
Dans un espace Euclidien à 2 dimensions, on considère un tenseur $\mathbf{T}$ d'ordre 3, dont les composantes mixtes t^i_{jk} sont :

$$t^1_{11} = 0,\ t^1_{12} = 2,\ t^1_{21} = -1,\ t^1_{22} = 3,\ t^2_{11} = 3,\ t^2_{12} = -1,\ t^2_{21} = 0,\ t^2_{22} = -2 \tag{4}$$

   (a) Calculer les composantes du tenseur $\mathbf{U}$ (qui est ici en fait un vecteur particulier !), dont les composantes sont définies par :

$$u_k = t^i_{ik}. \tag{5}$$

   (b) Soit une base $\{\overrightarrow{e}_i\}$, dans cet espace, dont le tenseur métrique a pour composantes covariantes :

$$g_{11} = 2,\ g_{22} = 1,\ g_{12} = g_{21} = -3 \tag{6}$$

   Déterminer les composantes covariantes t_{ijk} du tenseur $\mathbf{T}$.

   (c) Déterminer les composantes contravariantes g^{ij} du tenseur métrique.

   (d) Calculer les composantes mixtes t^{ij}_k du tenseur $\mathbf{T}$.