TD : Harmoniques sphériques et champ magnétique terrestre

Le champ magnétique à la surface de la Terre peut être vu comme la somme de deux contributions : l'une d'origine externe (en majeure partie liée au Soleil), et l'autre d'origine interne à la Terre. Le champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ vérifie ainsi les équations suivantes :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{B}} = -\overrightarrow{\nabla}\mathrm{V} \\ \mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{B}} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où V est le potentiel qui vérifie donc l'équation de Laplace $\Delta \mathrm{V} = 0$. Le potentiel V qui est une fonction réelle, peut donc s'écrire :

$$\mathrm{V} = \mathrm{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{r}}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(\mathrm{g}_n^m\cos m\phi + \mathrm{h}_n^m \sin m\phi)\mathrm{p}_n^m(\cos\theta) \tag{2}$$

avec une dépendance en 1/r pour la partie radiale ; a est le rayon de la sphère ; les $\mathrm{p}_n^m(\cos\theta)\cos(m\phi)$ et $\mathrm{p}_n^m(\cos\theta)\sin(m\phi)$ représentent des Harmoniques Sphériques Surfaciques, qui sont ici orthonormées en ayant utilisé la formule de quasi-normalisation de Schmidt :

$$\begin{cases} \mathrm{p}_n^m(\cos\theta) = \mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\sqrt{\frac{2(n-m)!}{(n+m)!}} \;\text{ pour }\; m \neq 0 \\ \mathrm{p}_n^0(\cos\theta) = \mathrm{P}_n^0(\cos\theta) \;\text{ pour }\; m = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Les coefficients réels g_n^m et h_n^m décrivent la partie du champ magnétique interne à la sphère de rayon a. On peut déduire les coefficients g_n^m et h_n^m à la surface de la Terre (r = a) à partir des données magnétiques enregistrées à la surface de la Terre.

Les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ sont notées $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ dans le repère local ; ses composantes sphériques sont notées $(\mathrm{B}_r, \mathrm{B}_\theta, \mathrm{B}_\phi)$.

1. Calcul des composantes du champ magnétique
   (a) Ecrire le gradient de V en sphériques.
   (b) En déduire les composantes $(\mathrm{B}_r, \mathrm{B}_\theta, \mathrm{B}_\phi)$.
   (c) Quelles sont les relations entre $\overrightarrow{e}_x$ et $\overrightarrow{e}_\theta$, $\overrightarrow{e}_y$ et $\overrightarrow{e}_\phi$, $\overrightarrow{e}_z$ et $\overrightarrow{e}_r$. Faire un schéma.
   (d) En déduire que, à la surface de la Terre, et pour un couple (m, n) donné, les composantes locales de $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ sont :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_n^m = -(\mathrm{g}_n^m\cos m\phi + \mathrm{h}_n^m\sin m\phi)\sin\theta\frac{d\mathrm{p}_n^m}{d\cos\theta} \\ \mathcal{Y}_n^m = m(\mathrm{g}_n^m\sin m\phi - \mathrm{h}_n^m\cos m\phi)\frac{1}{\sin\theta}\mathrm{p}_n^m \\ \mathcal{Z}_n^m = -(n+1)(\mathrm{g}_n^m\cos m\phi + \mathrm{h}_n^m\sin m\phi)\mathrm{p}_n^m \end{cases} \tag{4}$$

2. Variations zonales
   On considère le cas $n = 3$ et $m = 0$. Etudier explicitement en fonction de θ et ϕ la variation des composantes $(\mathcal{X}_n^m, \mathcal{Y}_n^m, \mathcal{Z}_n^m)$ à la surface de la Terre. Faire un schéma, et montrer que les variations obtenues sont de type "zonales".

   Remarque : on appelle harmoniques zonaux le cas $m = 0$, harmoniques tesséraux la cas $0 < m < n$, et harmoniques sectoriels la cas $m = n$ (cf. figure 1).

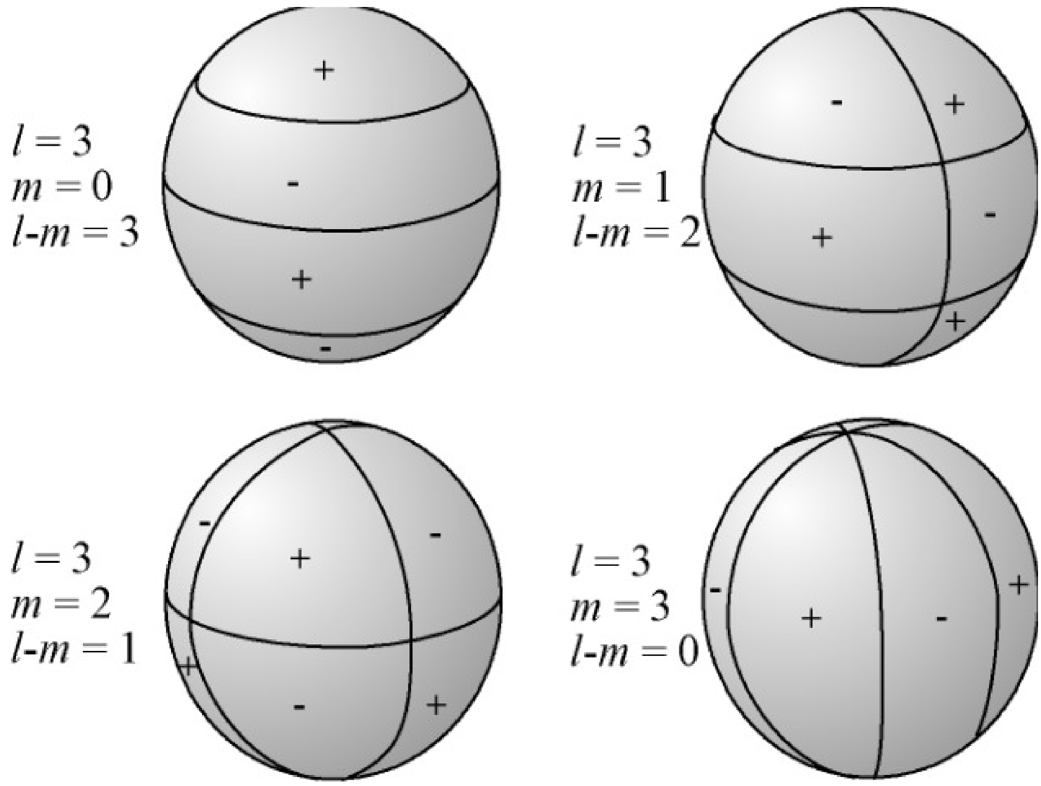

FIGURE 1 – Harmoniques sphériques à la surface terrestre (zones positives/négatives). Sur la figure, l est le degré, m est l'ordre. *[d'après Wikipedia]*