MATHEMATIQUES - 1A - EOST - 2020/2021 - C. Zaroli

# TD10 — **Autour des harmoniques sphériques**

*Remarque.* Les notations (degré, ordre, etc) employées ci-dessous, et dans les vidéos et le support de cours associés, sont parfois un peu changeantes — mais rien d'insurmontable :-)

1. **Normalisation des harmoniques sphériques**
   Les harmoniques sphériques (surfaciques) sont définies par : $Y_n^m(\theta,\varphi) = \mathcal{C}_n^m e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta)$. Exprimer le coefficient $\mathcal{C}_n^m$ en fonction de $n$ et $m$, tel que les $Y_n^m$ constituent un système de fonctions orthonormées sur la sphère unité usuelle, $S_2(\theta,\varphi)$, c'est-à-dire vérifiant :
   $$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} Y_{n'}^{m'}(\theta,\varphi)\, Y_n^{m*}(\theta,\varphi)\, \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \delta_{nn'}\,\delta_{mm'}\,.$$
   Par convention le signe de $\mathcal{C}_n^m$ sera choisi comme étant égal à $(-1)^m$.

2. **Harmoniques sphériques et série de Laplace**
   (a) Soit $Y_{\ell,m}$ l'harmonique sphérique (surfacique) normalisée telle que : $Y_{\ell,m}(\theta,\phi) = N_{\ell,m}P_{\ell,m}(\cos\theta)\,e^{im\phi}$, avec $N_{\ell,m} = (-1)^m\sqrt{\left(\frac{2\ell+1}{4\pi}\right)\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}$, où $P_{\ell,m}$ est le polynôme associé de Legendre, $\ell$ est le degré et $m$ l'ordre ($-\ell \le m \le \ell$), et $\theta$ est la colatitude, et $\phi$ la longitude. Tout d'abord, **montrer** que : $Y_{\ell,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m Y_{\ell,m}^*(\theta,\phi)$. Notez que la démonstration (si vous en avez besoin) est donnée dans le chapitre 9 du support de cours. Puis **calculer** toutes les harmoniques sphériques $Y_{\ell,m}$ avec $\ell \le 2$.
   (b) Soit une fonction $f$, définie sur la sphère unitaire, qui peut être développée en série de Laplace : $f(\theta,\phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} f_{\ell,m}Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$, avec $f_{\ell,m} = \iint f(\theta,\phi)\,Y_{\ell,m}^*(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi$. **Calculer** tous les coefficients $f_{\ell,m}$ pour la fonction suivante : $f(x,y,z) = x + z^2/2$, où $(x,y,z)$ sont les coordonnées cartésiennes usuelles telles que $x^2+y^2+z^2 = 1$.

*Formulaire* :

☐ polynôme de Legendre : $P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell\left(x^2-1\right)^\ell}{dx^\ell}$ ; formule du produit scalaire de deux polynômes de Legendre : $\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2\delta_{n,m}}{2n+1}$, avec $\delta$ le symbole de Kronecker.

☐ polynômes de Legendre associés : $P_{\ell,m}(x) = \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)$ ; $P_{\ell,-m}(x) = (-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}P_{\ell,m}(x)$ ; formule du produit scalaire de deux polynômes de Legendre Associés : $\int_{-1}^{1} P_n^m(x)P_{n'}^m(x)dx = \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}\delta_{nn'}$

☐ produit scalaire de deux harmoniques sphériques : $\int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=0}^{\pi} Y_{\ell',m'}(\theta,\phi)\,Y_{\ell,m}^*(\theta,\phi)\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi = \delta_{\ell,\ell'}\,\delta_{m,m'}$

*Exemple*

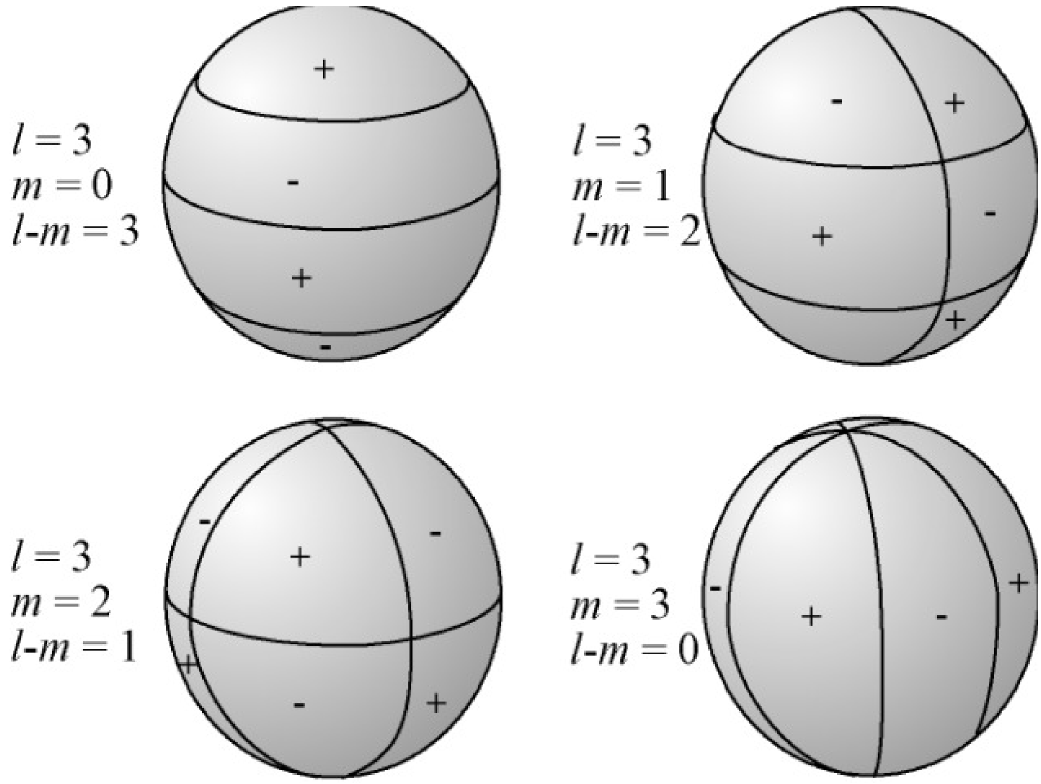


FIGURE 1 – Harmoniques sphériques, $Y_l^m(\theta, \varphi)$, à la surface terrestre (on voit seulement ici les zones positives et négatives). Sur la figure, $l$ est le degré, $m$ est l'ordre. *[Wikipedia]*