TD1 : CALCUL TENSORIEL

1. Ecriture tensorielle

   Ecrire les trois expressions suivantes en utilisant la *convention d'Einstein* et l'*écriture indicielle* des dérivées partielles :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} dx^3 = \ ? \tag{1}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{dx^1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}\frac{dx^n}{dt} = \ ? \tag{2}$$

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{12}dx^1dx^2 + g_{21}dx^2dx^1 + g_{22}(dx^2)^2 = \ ? \tag{3}$$

2. Base complémentaire

   Soit, dans un plan, une base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ telle que $|\overrightarrow{e_1}| = 3$, $|\overrightarrow{e_2}| = 1$ et $(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}}) = 30°$.

   (a) Représenter la base (graphiquement).

   (b) Déterminer la base duale ou supplémentaire $\{\overrightarrow{\varepsilon}^i\}$ (c-à-d la norme des vecteurs et l'angle qu'ils font entre eux).

   (c) Représenter la base duale (graphiquement).

   (d) Vérifier la relation entre les vecteurs des deux bases :

$$\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{\varepsilon}^j = \delta_i^j. \tag{4}$$

3. Déterminant d'ordre 3 et symbole de Levi-Civita

   Démontrer qu'un déterminant d'ordre 3 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\det(a_{ij}) = \epsilon^{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} \tag{5}$$

   avec le symbole de Levi-Civita ϵ^{ijk} qui vaut :
   $\rightarrow$ 0 si $i = j$ ou $i = k$ ou $j = k$,
   $\rightarrow$ 1 si (i, j, k) tous différents et permutation paire de (1, 2, 3),
   $\rightarrow$ -1 si (i, j, k) tous différents et permutation impaire de (1, 2, 3).

$\epsilon^{ijk} =$

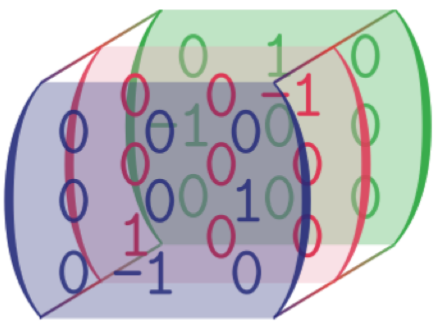

FIGURE 1 – Visualisation d'un symbole de Levi-Civita en 3 dimensions. i d'avant en arrière, j de haut en bas et k de gauche à droite. [d'après Wikipedia]