MATHEMATIQUES - 1A - EOST - 2020/2021 - C. Zaroli

TD8 — **Autour des géodésiques**

L'équation des géodésiques, lorsque les trajectoires sont paramétrisées par l'abscisse curviligne, s, se réduit dans le cas général à :

$$\frac{d^2y^l}{ds^2} + \Gamma_{j\,k}^{\,l} \frac{dy^j}{ds}\frac{dy^k}{ds} = 0\,. \tag{1}$$

1. Si l'on considère un espace vectoriel euclidien muni de coordonnées *cartésiennes* $\{x^i\}$, que pouvez-vous dire sur la métrique g_{ij} correspondante ? En déduire les symboles de Christoffel correspondants. Puis en déduire l'équation de la géodésique dans un tel espace. Enfin, en déduire explicitement les trajectoires des géodésiques correspondantes.

2. On souhaite écrire l'équation générale des géodésiques dans le cas de la sphère à deux dimensions, de rayon unitaire, et notée S_2. Pour cela, identifiez les coordonnées curvilignes y^i correspondantes, calculez la métrique g_{ij} correspondante, et en déduire les symboles de Christoffel de deuxième espèce non nuls. Rappel de la formule pour calculer les symboles de première espèce :

   $$\Gamma_{kji} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki})\,.$$

   Ecrire ensuite explicitement le système d'équations différentielles correspondant. Montrez que les méridiens sont des solutions triviales de ce système d'équations.

3. Soit s l'abscisse curviligne d'une fourmi se déplaçant le long d'une courbe $\mathcal{C}(y^i)$ sur la sphère unitaire S_2 (pour fixer les choses avec un espace topologique usuel), c'est-à-dire la distance parcourue par la fourmi en fonction du temps t à partir d'un point origine. Prenant comme paramètre de la courbe $\mathcal{C}$ l'abscisse curviligne s, on a : $y^i = y^i(s)$, et les équations des géodésiques s'écrivent comme (1). Considérons à présent le vecteur unité $\mathbf{u}$ tangent à la courbe $\mathcal{C}(s)$, et de composantes contravariantes u^i telles que :

   $$u^i = \frac{dy^i}{ds}\,.$$

   Par suite de son interprétation cinématique, le vecteur $\mathbf{u} = (u^i)$ est appelé le vecteur vitesse unitaire. Montrer que les équations géodésiques (1) s'écrivent sous la forme générale suivante :

   $$u^k \nabla_k u^i = 0\,. \tag{2}$$

   Rappel de la formule de la dérivée covariante d'un vecteur :

   $$\nabla_k u^i = \partial_k u^i + u^j \Gamma_{k\,j}^{\,i}\,.$$